

Über interpolierende C^∞ -Spline-Funktionen

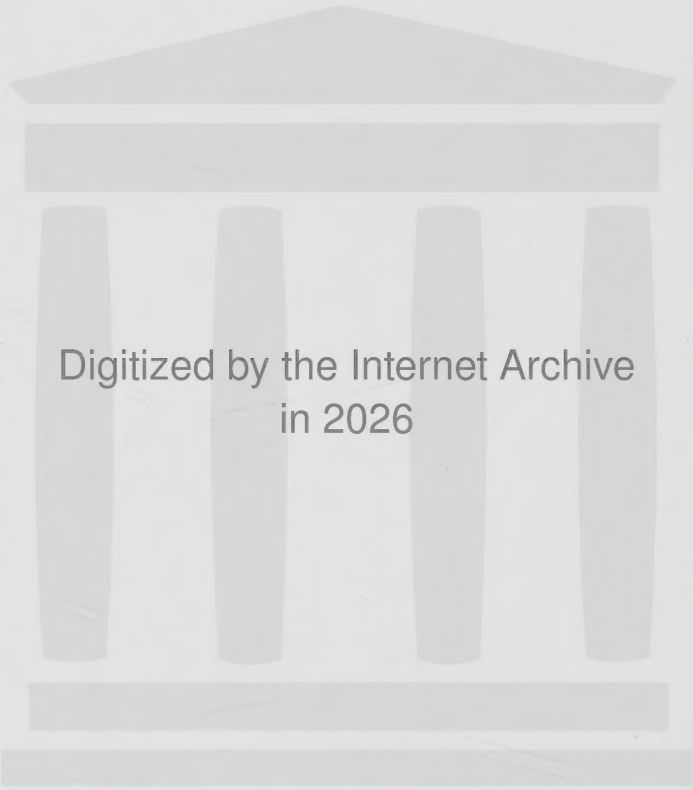
DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Wolfgang A. Halang
aus Essen

Bochum 1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546603_0019

Über interpolierende C^∞ -Spline-Funktionen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Wolfgang A. Halang

aus Essen

Bochum 1976



Dissertation eingereicht am 28. 6.1976

Tag der mündlichen Prüfung: 13.12.1976

Dekan: Prof. Dr. W. von Wahl

Referent: Prof. Dr. W. Haußmann

Korreferent: Prof. Dr. D. Braess

Inhaltsverzeichnis

§ 0	Einleitung	1
<u>Kapitel I</u>	Faltungskerne mit kompakten Trägern	8
§ 1	Polynome als Eigenfunktionen der Faltungstransformation	8
§ 2	Konstruktion von Kernen, die Polynome reproduzieren	13
§ 3	Konvergenz und Fehlerabschätzungen	21
<u>Kapitel II</u>	Regularisierung von Polynom-Spline- Funktionen	34
§ 4	Mittelpunkt-Splines geraden Grades	34
§ 5	Eigenschaften interpolierender C^∞ -Spline-Funktionen	55
§ 6	Zur C^∞ -Lagrange- und C^∞ -Hermite- Interpolation	72
§ 7	Minimaleigenschaften einer Klasse von Splines geraden Grades	93
Literaturverzeichnis		101

§ 0 Einleitung

Verfahren zur Interpolation und Approximation von Funktionen mit Hilfe von Spline-Funktionen zeichnen sich dadurch aus, daß für sie günstige Fehlerabschätzungen gelten. Im Gegensatz zur Polynominterpolation treten bei steigender Anzahl der Interpolationsbedingungen gleichmäßig beschränkte Operatornormen auf, allerdings muß dabei auf höhere Differenzierbarkeit verzichtet werden.

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Frage, ob es beliebig oft differenzierbare Interpolationsfunktionen gibt, die entsprechende Approximationseigenschaften wie Spline-Funktionen haben, und wie sie konstruiert werden können. Wir werden zeigen, daß sich durch Faltung von Polynom-Spline-Funktionen mit geeigneten Kernen solche Interpolationsfunktionen gewinnen lassen. Die Konstruktion solcher " C^∞ -Spline-Funktionen" birgt keine numerischen Schwierigkeiten, da der Faltungsprozeß auch auf Spline-Funktionen angewandt werden kann, die nur geringe Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen. Letztere können demnach durch lokale Verfahren erzeugt werden, was insbesondere bei Interpolationsproblemen mit sehr vielen Interpolationsbedingungen von Bedeutung ist.

Erste Ansätze in dieser Richtung gehen auf SCHOENBERG [16] zurück, der Polynom-Spline-Funktionen mit dem sogenannten Weierstraß-Kern faltete. Schoenberg bewies für die so konstruierten "analytischen Spline-Kurven" Interpolations-

eigenschaften bezüglich äquidistanter Gitter, untersuchte jedoch nicht deren Approximationsverhalten. Mit Hilfe der Faltungsoperation bestimmte HILBERT [9] Approximationen der Klasse C^∞ für nicht hinreichend oft differenzierbare Funktionen. Die dabei verwendeten Kerne sind unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompakten Trägern, die Polynome bis zu einem bestimmten Grade bei der Faltung reproduzieren, d.h. diese Polynome sind Eigenfunktionen der linearen Faltungstransformation bezüglich der betrachteten Kerne und des Eigenwertes 1.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden wir uns mit derartigen Faltungskernen beschäftigen, da sich mit ihnen aus Polynom-Splines interpolierende C^∞ -Spline-Funktionen konstruieren lassen. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Kern bei der Faltung Elemente bestimmter Polynomräume reproduziert (Satz 1.3), werden wir in § 1 herleiten. Mit Hilfe dieser Bedingungen werden wir im folgenden Abschnitt vier Verfahren zur Berechnung solcher Kerne angeben. Eine Klasse dieser Kerne hat die zusätzliche Eigenschaft, daß bei der Konvolution auch die Funktionswerte und die stetigen Ableitungen von Polynom-Splines an den Knoten ungeändert bleiben (Satz 2.6). Daran anschließend werden wir als Grundlage für die Fehlerabschätzungen regularisierter stückweise polynomialer Interpolationsfunktionen im Paragraphen 5 einen Ausdruck für die Differenzen

$$D^j (s - \phi_h * s)(x) \quad (x \in \mathbb{R}, h > 0 \text{ und } j = 0, \dots, n+1)$$

herleiten (Satz 3.2), wobei s eine Spline-Funktion des

Grades m aus $C^n(\mathbb{R})$, $n \leq m$, mit genau einem Knoten ist und die Faltungskerne ϕ_h mit den Trägern $[-h, h]$ Polynome m -ten Grades reproduzieren. Daraus ergibt sich eine spezielle Methode (Satz 3.3) zur expliziten Berechnung der hier auftretenden Faltungsintegrale $D^j(\phi_h * s)(x)$, die den zur Funktionsauswertung notwendigen Rechenaufwand gegenüber numerischer Integration wesentlich reduziert. Weiterhin lassen sich zusammen mit dem Peano-Kern-Theorem Schranken für

$$\|D^j(f - \phi_h * f)\|_{\infty, I} \quad (j=0, \dots, n)$$

in Abhängigkeit von h angeben, wenn die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung des abgeschlossenen Intervalls I der Klasse C^{n+1} angehört (Satz 3.8).

Der Behandlung interpolierender C^∞ -Spline-Funktionen und insbesondere der Abschätzung der entsprechenden Approximationsfehler ist das zweite Kapitel gewidmet. Zuerst werden wir im Paragraphen 4 Polynom-Spline-Funktionen geraden Grades untersuchen, die in den Mittelpunkten der Partitionsintervalle vorgegebene Funktionen interpolieren. Über diese ist bisher nur wenig bekannt. Sie werden im Paragraphen 5 zur Konstruktion von C^∞ -Spline-Funktionen von großer Bedeutung sein. Wir werden die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Mittelpunkt-Splines zeigen (Satz 4.1) sowie die Approximationsfehler in der Čebyšev-Norm abschätzen (Satz 4.5 und 4.6). Diese Fehlerabschätzungen basieren auf der Betrachtung der die Mittelpunkt-Splines bestimmenden linearen Gleichungssysteme, da für diese Funktionenklasse keine analogen Minimaleigenschaften gezeigt werden können (Satz

4.3), wie sie für interpolierende Splines ungeraden Grades gelten und zur Fehlerabschätzung herangezogen werden. Zusammen mit den bekannten Aussagen über Splines ungeraden Grades haben wir damit alle Voraussetzungen zur Verfügung, die wir im fünften Paragraphen für die Untersuchung der Interpolations- und Konvergenzeigenschaften von C^∞ -Spline-Funktionen (Satz 5.1 und 5.3) benötigen, die durch Faltung von Polynom-Splines geraden und ungeraden Grades mit geeignet gewählten Kernen mit kompakten Trägern konstruiert werden. Interpoliert der Spline s vom Grade m die Funktion f , dann ist die Existenz der Ableitung $f^{(m+1)}$ die hinreichende Bedingung für den Nachweis entsprechender Fehlerabschätzungen mit möglichst hohen Konvergenzordnungen. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich auch die Konvergenz der Regularisierungen von $s^{(m+1)}$ gegen $f^{(m+1)}$ zeigen (Satz 5.7). Darüberhinaus werden wir die Stetigkeit der C^∞ -Spline-Interpolationsoperatoren auf der Basis höher defizienter, d.h. weniger oft differenzierbarer, Polynom-Splines bezüglich verschiedener Sobolev-Normen beweisen (Satz 5.4). Damit sind wir dann in der Lage, für diese Interpolationsverfahren eine allgemeine Fehlerabschätzung anzugeben (Satz 5.5), die im sechsten Paragraphen eine wichtige Rolle spielen wird. Dort werden wir uns mit einigen (z.T. lokalen) Verfahren zur Lagrange-, Hermite- und Hermite-Birkhoff-Interpolation beschäftigen, die stückweise polynomiale Interpolationsfunktionen hoher Defizienz liefern. Durch Regularisierung erhalten wir daraus

C^∞ -Spline-Funktionen, die die interpolierten Funktionen global von der gleichen Ordnung approximieren, die für die zugrunde liegenden Polynom-Spline-Interpolationsverfahren nur lokal nachgewiesen werden kann.

Zum Abschluß wollen wir im Paragraphen 7 eine zweite Klasse von Spline-Funktionen geraden Grades untersuchen, die dadurch bestimmt sind, daß sie die lokalen Integrale vorgegebener Funktionen interpolieren. Für diese lassen sich im Gegensatz zu den Mittelpunkt-Splines Minimaleigenschaften nachweisen (Satz 7.7), die denen der Splines ungeraden Grades analog sind. Zum Beweis dieser Aussagen werden wir ein verallgemeinertes Problem im Rahmen der Theorie der Spline-Systeme behandeln (Satz 7.2), worunter auch die Konstruktion von Spline-Systemen bezüglich Differentialoperatoren gebrochener Ordnung fällt (Korollar 7.8).

Herrn Prof. Dr. Werner Haußmann und Herrn Prof. Dr. Dietrich Braess möchte ich an dieser Stelle für wertvolle Ratschläge und Hinweise sehr herzlich danken.

Zur Bezeichnungsweise

Unter $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}$ wollen wir die reellen, komplexen bzw. die ganzen Zahlen und unter $\mathbb{N}$ die Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ verstehen. Die Monome $\{\pi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \pi_i(x) = x^i, i=0, \dots, m, x \in \mathbb{R}\}$ spannen den Raum der Polynome Π_m maximal m-ten Grades, $m \in \mathbb{N}$, auf. Weiterhin sei $\Pi_{-1} := (0)$ und für

$\pi: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definieren wir

$$\Pi_m(\pi) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f|_{(-\infty, x_1)}, f|_{(x_n, +\infty)}, f|_{(x_i, x_{i+1})} \in \Pi_m,$$

$$i=1, \dots, n-1\}.$$

Für $I = \mathbb{R}$ oder $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, führen wir folgende

Funktionenräume ein:

$$C^{-1}(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{es gibt } k \geq 1 \text{ Punkte } x_1 < \dots < x_k \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß die Grenzwerte } \lim_{h \rightarrow 0} f(x_1 + h), l=1, \dots, k,$$

$$\text{existieren und die Einschränkungen } f|_{(-\infty, x_1)},$$

$$f|_{(x_k, +\infty)} \text{ und } f|_{(x_l, x_{l+1})}, l=1, \dots, k-1, \text{ stetig}$$

$$\text{sind}\},$$

$$C^m(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar, } m \in \mathbb{N}\},$$

$$L^p(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar und } (\int_I |f|^p(x) dx)^{1/p} < \infty, 1 \leq p < \infty\},$$

$$L^\infty(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} \text{ess } |f(x)| < \infty\},$$

$$W_p^{(m)}(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^{m-1}(I), f^{(m-1)} \text{ ist absolut stetig} \\ \text{und } f^{(m)} \in L^p(I); m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty\} \text{ und}$$

$$L_{loc}^1(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_K |f(x)| dx < \infty \text{ für alle kompakten } K \subset \mathbb{R}\}.$$

Die Abbildung $D: C^1(I) \rightarrow C(I)$ sei definiert durch $f \mapsto f'$.

Mit $\text{Id}: X \rightarrow X$ sei die identische Abbildung auf der Menge X gemeint.

Den Träger der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit $f|_S = 0$, bezeichnen wir mit $\text{supp } f$.

Schließlich seien für $m, n \geq 1$ $\text{Mat}(m, n)$ die Menge aller reellen $m \times n$ -Matrizen und $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \text{Mat}(n, n)$ die aus den Elementen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gebildete Diagonalmatrix.

Kapitel I Faltungskerne mit kompakten Trägern

§ 1 Polynome als Eigenfunktionen der Faltungstransformation

Zur Konstruktion interpolierender und von hoher Ordnung differenzierbarer Approximationsfunktionen wollen wir weniger oft differenzierbare Interpolierende der Faltungstransformation mit geeigneten Kernen unterziehen. Diese Operation ist wie folgt definiert.

Definition 1.1: Gegeben seien zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das Faltungsprodukt - die Konvolution - $f * g$ von f und g wird definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

sofern dieses uneigentliche Integral existiert.

Die wichtigsten Eigenschaften der Faltungstransformation, die wir zum Beweis des folgenden Satzes und auch weiterhin laufend brauchen werden und auf denen die Anwendbarkeit der Operation für unsere Zwecke beruht, fassen wir im folgenden Hilfssatz zusammen.

Lemma 1.2 (vgl. DOETSCH [7], NERI [15]):

- (i) Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ seien $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$. Durch $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ werde r , $1 \leq r \leq \infty$, definiert. Dann existiert $h := f * g$ f.ü. und ist in $L^r(\mathbb{R})$.

Weiterhin gilt die Ungleichung von Young:

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

- (ii) Unter den Voraussetzungen von (i) wird durch die Faltung mit dem Kern f eine beschränkte, lineare Abbildung

$$T_f : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}), \quad T_f g := f * g,$$

mit $\|T_f\| \leq \|f\|_p$ definiert.

(iii) Sei die Existenz der unten auftretenden Faltungsintegrale vorausgesetzt, so gelten f.ü. die folgenden Rechenregeln:

(1) Kommutativität: $f * g = g * f,$

(2) Assoziativität: $(f * g) * h = f * (g * h),$

(3) Distributivität: $(f + g) * h = f * h + g * h,$

(4) Assoziativität der Skalarmultiplikation:

$$\alpha * (f * g) = (\alpha * f) * g.$$

(5) Der Translationsoperator τ_h sei definiert durch

$$\tau_h \phi(x) := \phi(x - h), \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

Dann sind Faltungs- und Translationsoperator miteinander vertauschbar:

$$\tau_h(f * g) = f * (\tau_h g).$$

(6) Mit $\phi(x) := f(-x)$ und $x \in \mathbb{R}$ läßt sich $f * g$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot g(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(y-x) \cdot g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \cdot g(x+y) dy. \end{aligned}$$

(iv) Für den Träger von $f * g$ gilt:

$$\text{supp}(f * g) \subset \{w \in \mathbb{R} \mid w = x + y, \quad x \in \text{supp } f, \quad y \in \text{supp } g\}.$$

(v) Das Faltungsprodukt ist stetig, wenn gilt

(1) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ oder

(2) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f(x)$ gleichmäßig beschränkt für $x \in \mathbb{R}$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$.

(vi) Das Faltungsprodukt $f * g$ ist eine differenzierbare Funktion, wenn $f', g \in L^1(\mathbb{R})$ sind. Es gilt dann f.ü.

$$D(f * g) = (Df) * g.$$

Diese Gleichung gilt auf ganz $\mathbb{R}$, wenn zusätzlich die Bedingungen (1) oder (2) aus (v) für f' und g erfüllt sind.

Wir definieren den Raum $\mathcal{D}$ der Testfunktionen, der in $L^1(\mathbb{R})$ dicht ist, durch

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}) := \{ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ supp } \phi \text{ ist kompakt} \}.$$

(vii) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wegen

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot \phi(y) dy = \int_{\text{supp } \phi} f(x-y) \cdot \phi(y) dy$$

existiert $f * \phi$. Weiterhin gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$D^k(f * \phi) = f * (D^k \phi)$$

und somit $f * \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(viii) Sei $f \in C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt auch

$$D^k(f * \phi) = (D^k f) * \phi, \quad k=0, \dots, n.$$

Sei f eine Funktion, die auf $X \subset \mathbb{R}$ vorgegebene Werte annimmt, und ϕ ein Faltungskern. Wir wollen nun Bedingungen für ϕ angeben, so daß für gewisse Klassen von Funktionen f die Gleichungen

$$f(x) = (\phi * f)(x), \quad x \in X,$$

gelten. Ist f insbesondere eine bzgl. X interpolierende Approximationsfunktion, so wird dieses Interpolationsverhalten durch die Faltungstransformation nicht verändert.

Für $X = \mathbb{R}$ ist die gesuchte Funktionenklasse der Eigenraum des Operators T_ϕ zum Eigenwert 1. Die Frage, wann Polynome des Grades $\leq m$ bzgl. der Faltung mit dem Kern ϕ reproduziert werden, d.h. wann Π_m im Eigenraum von T_ϕ zum Eigenwert 1 enthalten ist, beantwortet der

Satz 1.3: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für alle $p \in \Pi_m$ gilt genau dann $\phi * p = p$, wenn der Kern ϕ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$;
- (ii) $\int_{\mathbb{R}} x^j \cdot \phi(x) dx = 0$, $j=1, \dots, m$.

Ist ϕ eine gerade Funktion, so kann (ii) ersetzt werden durch

$$(ii') \quad \int_{\mathbb{R}} x^{2j} \cdot \phi(x) dx = 0 \quad , \quad j=1, \dots, \left[\frac{m}{2} \right].$$

Beweis: Wegen der Linearität der Faltungstransformation genügt der Nachweis für die Monome π_j , $j=0, \dots, m$. Wir berechnen $(\phi * \pi_j)(x)$ mit Hilfe des binomischen Satzes:

$$\begin{aligned} (\phi * \pi_j)(x) &= (\pi_j * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \cdot (x-y)^j dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \cdot \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} \cdot x^{j-v} \cdot (-1)^v \cdot y^v dy = \\ &= \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} \cdot x^{j-v} \cdot (-1)^v \cdot \int_{\mathbb{R}} y^v \cdot \phi(y) dy, \quad j=0, \dots, m. \end{aligned}$$

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Monome gilt mithin genau dann $(\phi * \pi_j)(x) = x^j = \pi_j(x)$, $j=0, \dots, m$, wenn ϕ die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Ist ϕ eine gerade Funktion, so sind die $\pi^{2j+1} \cdot \phi$, $j \in \mathbb{N}$, ungerade Funktionen. Also verschwinden alle Integrale $\int_{\mathbb{R}} x^{2j+1} \cdot \phi(x) dx$, $j \in \mathbb{N}$, so daß sich (ii) auf (ii') reduziert. $\diamond$

Zum Abschluß dieses Paragraphen zitieren wir noch ein Ergebnis von BOCHNER, der den Eigenraum der Faltungstransformation zum Eigenwert 1 für eine bestimmte Klasse von Kernen explizit angegeben hat.

Satz 1.4 (BOCHNER [3]):

Gegeben seien die in jedem kompakten Intervall beschränkten und meßbaren Funktionen $\phi, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gebe Konstanten $A, B > 0$, derart daß für den Kern ϕ und $x \in \mathbb{R}$

$$|\phi(x)| < A \cdot \exp(-B \cdot |x|)$$

gelte. Bezeichne $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation, so besitzt die Funktion

$$\mathcal{L} := 1 - \mathcal{F}(\phi)$$

höchstens endlich viele reelle Nullstellen α_k , $k=1, \dots, n$, mit den Vielfachheiten l_k+1 . Sei der Operator T_ϕ auf dem Raum aller Funktionen f definiert, für die es jeweils ein $C>0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ gebe mit

$$|f(x)| < C \cdot (1+|x|^m), \quad x \in \mathbb{R},$$

dann wird der Eigenraum von T_ϕ zum Eigenwert 1 von den Funktionen

$$\{\pi_j \cdot \exp(-i \cdot \alpha_k \cdot \pi_1) \mid k=1, \dots, n \text{ und } j=0, \dots, l_k\}$$

aufgespannt.

Beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen, so ersehen wir aus Satz 1.4, daß Π_l , $l=-1, 0, 1, \dots$, im Eigenraum von T_ϕ zum Eigenwert 1 enthalten ist, wenn $\mathcal{L}$ im Punkte 0 eine Nullstelle der Vielfachheit $l+1$ hat, und daß auch mit Monomen multiplizierte trigonometrische Funktionen Eigenfunktionen von T_ϕ sein können, wenn $\mathcal{L}$ entsprechende Nullstellen besitzt. Im folgenden Paragraphen werden wir Faltungskerne aus $\mathcal{D}$ konstruieren, für die insbesondere die Aussage von Satz 1.4 gilt, da sie die obigen Voraussetzungen erfüllen.

§ 2 Konstruktion von Kernen, die Polynome reproduzieren

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß der Faltungsoperator T_ϕ bzgl. des Kerns ϕ Polynome reproduziert. Die Existenz solcher Kerne werden wir in diesem Paragraphen durch Angabe einiger Verfahren zu ihrer Konstruktion beweisen. Unter Verwendung der Gleichungen aus Satz 1.3 werden wir ausschließlich Kerne der Klasse $C_0^\infty(\mathbb{R})$ berechnen, d.h. Elemente der Mengen

$$C_{0,m}^\infty(\mathbb{R}) := \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \mid \phi * p = p \text{ für alle } p \in \Pi_m\},$$

weil wir diese zur Regularisierung interpolierender Polynom-Splines in den folgenden Paragraphen benötigen werden.

Da i.a. bei der Berechnung von $(\phi * f)(x)$, $x \in \mathbb{R}$, die Werte der Funktion f für Argumente $t > x$ nicht vor denen für $t < x$ ausgezeichnet sind und umgekehrt, werden wir uns hier auf gerade Kernfunktionen ϕ beschränken, d.h. es gilt $\phi(x) = \phi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mit einem Ergebnis von HOFF [10] gilt nun der

Satz 2.1: Sei $\phi \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ gerade und nichtnegativ, sowie $k \in \mathbb{N}$.

Dann existieren reelle Zahlen a_i , $i=0, \dots, k$, derart daß

$$\theta := \phi \cdot \sum_{i=0}^k a_i \cdot \pi_{2i} \in C_{0,2k+1}^\infty(\mathbb{R})$$

erfüllt ist. Die Koeffizienten a_i sind die eindeutig bestimmten Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(G) \quad \sum_{i=0}^k a_i \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2(i+j)} \cdot \phi(x) dx = \delta_{0j}, \quad j=0, \dots, k.$$

Beweis: Aus $\phi \in \mathcal{D}$ folgt die Existenz obiger Integrale. Die

Koeffizientenmatrix des linearen Systems (G) ist symmetrisch

und positiv definit (HOFF [10]), der Lösungsvektor $(a_0, \dots, a_k)$ mithin eindeutig bestimmt. Die Gleichungen (G) sind mit den Bedingungen (i) und (ii') aus Satz 1.3 äquivalent, wie man nach einfachen Umformungen sofort sieht. Der Kern θ ist als Produkt zweier gerader Funktionen selbst gerade und wegen $\phi \in \mathcal{D}$ und $\sum_{i=0}^k a_i \cdot \pi_{2i} \in C^\infty(\mathbb{R})$ außerdem in $\mathcal{D}$. Damit folgt die Behauptung. $\diamond$

Bemerkung 2.2: Bei HOFF [10] wird die Existenz von geraden Faltungskernen der Form $\lambda := (p \cdot \mu) \cdot f$ gezeigt, wobei $f \neq 0$ eine stetige, nichtnegative, gerade und μ eine gerade, auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsende, analytische Funktion mit $\mu(0) = 0$ sowie p ein Polynom k -ten Grades ist. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, daß die Momente $\int_{\mathbb{R}} \mu^j(x) \cdot f(x) dx$, $j = 0, \dots, 2k$, existieren. Die Koeffizienten von p werden aus dem folgenden linearen Gleichungssystem berechnet:

$$\sum_{i=0}^k a_i \cdot \int_{\mathbb{R}} \mu^{i+j}(x) \cdot f(x) dx = \delta_{0j}, \quad j = 0, \dots, k.$$

Die so konstruierten Kerne erfüllen die Bedingungen

$$\int_{\mathbb{R}} \mu^j(x) \cdot \lambda(x) dx = \delta_{0j}, \quad j = 0, \dots, k,$$

d.h. sie reproduzieren nach Satz 1.3 Polynome $(2k+1)$ -ten Grades, wenn $\mu = \pi_2$ ist. Da sie, für $\mu = \pi_2$ und $f = \phi$ also auch das in Satz 2.1 definierte θ , in $(0, \infty)$ genau k einfache Nullstellen haben (HOFF [10]), werden sie "2k-Nullstellen-Kerne" bzgl. μ genannt. Diese $2k$ Nullstellen liegen im Inneren von $\text{supp } \phi$. $\diamond$

In § 3 werden wir sehen, daß die oben konstruierten Kerne für die explizite Berechnung von Faltungsintegralen nicht so gut geeignet sind wie Kerne aus $C_{0,m}^\infty(\mathbb{R})$, die sich als

Linearkombinationen von einfachen Elementen aus $C_{o,1}^{\infty}(\mathbb{R})$

mit paarweise verschiedenen Trägern darstellen lassen.

Eine Klasse solcher Kernfunktionen geben wir in den folgenden beiden Sätzen an.

Satz 2.3: Gegeben seien die gerade, nichtnegative Funktion

$\phi \in C_{o,1}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, die Partition

$\pi: 1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$, $k \geq 1$, von $[0, 1]$ und $h > 0$. Mit $h_i := \alpha_i \cdot h$, $i = 1, \dots, k$, gilt dann für die durch

$$\psi(x) := \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{\alpha_j^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2} \cdot \phi\left(\frac{x}{h_i}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

definierte Funktion $\Psi: \Psi \in C_{o,2k-1}^{\infty}(\mathbb{R})$ und $\text{supp } \Psi = [-h, h]$.

Beweis: Wir gehen von dem Ansatz $\Psi(x) := \sum_{i=1}^k a_i \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi\left(\frac{x}{h_i}\right)$

aus und werden die Koeffizienten a_i , $i = 1, \dots, k$, derart

bestimmen, daß $\Psi \in C_{o,2k-1}^{\infty}(\mathbb{R})$ ist. Auf Grund der Definition

gilt bereits für beliebige Koeffizienten: $\Psi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$ und Ψ

ist eine gerade Funktion. Nach Satz 1.3 sind demnach die

Bedingungen $\int_{\mathbb{R}} x^{2v} \cdot \Psi(x) dx = \delta_{ov}$, $v = 0, \dots, k-1$, notwendig und

hinreichend für die Behauptung. Mit Hilfe der Substitution

$y := x/h_i$ berechnen wir für $v \in \{0, \dots, k-1\}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2v} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi\left(\frac{x}{h_i}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} h_i^{2v} \cdot y^{2v} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi(y) \cdot h_i dy = h_i^{2v} \cdot \int_{\mathbb{R}} y^{2v} \cdot \phi(y) dy.$$

Somit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta_{ov} &= \int_{\mathbb{R}} x^{2v} \cdot \Psi(x) dx = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2v} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi\left(\frac{x}{h_i}\right) dx = \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \cdot h_i^{2v} \right) \cdot \int_{\mathbb{R}} y^{2v} \cdot \phi(y) dy, \quad v = 0, \dots, k-1, \end{aligned}$$

d.h. wegen $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ und $\int_{\mathbb{R}} x^{2v} \cdot \phi(x) dx > 0$, $v = 1, \dots, k-1$:

$$\delta_{ov} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot (h_i^2)^v, \quad v = 0, \dots, k-1.$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist die Transponierte der Vandermondschen Matrix, woraus die eindeutige Lösbarkeit

der Aufgabe folgt. Ihre Determinante hat bekanntlich den Wert $D = \prod_{i>j} (h_i^2 - h_j^2)$. Nach der Cramerschen Regel gilt für $1 \leq m \leq k$:

$$a_m \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_1^2 & \dots & h_{m-1}^2 & 0 & h_{m+1}^2 & \dots & h_k^2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ h_1^{2k-2} & \dots & h_{m-1}^{2k-2} & 0 & h_{m+1}^{2k-2} & \dots & h_k^{2k-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot \begin{vmatrix} h_1^2 & \dots & h_{m-1}^2 & h_{m+1}^2 & \dots & h_k^2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ h_1^{2k-2} & \dots & h_{m-1}^{2k-2} & h_{m+1}^{2k-2} & \dots & h_k^{2k-2} \end{vmatrix}.$$

Also

$$a_m \cdot D = (-1)^{m+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k h_j^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & h_1^2 & \dots & h_1^{2k-4} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & h_{m-1}^2 & \dots & h_{m-1}^{2k-4} \\ 1 & h_{m+1}^2 & \dots & h_{m+1}^{2k-4} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & h_k^2 & \dots & h_k^{2k-4} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k h_j^2 \cdot \prod_{\substack{i>j \\ 1 \leq i, j \leq k \\ i, j \neq m}} (h_i^2 - h_j^2), \text{ d.h.}$$

$$a_m = (-1)^{m+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k h_j^2 \cdot \prod_{\substack{i>j \\ 1 \leq i, j \leq k \\ i, j \neq m}} (h_i^2 - h_j^2) / \prod_{\substack{i>j \\ 1 \leq i, j \leq k}} (h_i^2 - h_j^2)$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k h_j^2 / \left\{ \prod_{i=m+1}^k (h_i^2 - h_m^2) \cdot \prod_{j=1}^{m-1} (h_m^2 - h_j^2) \right\}$$

$$= (-1)^{m-1} \cdot (-1)^{m+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k \frac{h_j^2}{h_j^2 - h_m^2} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^k \frac{\alpha_j^2 \cdot h^2}{\alpha_j^2 \cdot h^2 - \alpha_m^2 \cdot h^2},$$

woraus mit $\text{supp } \Psi = \text{supp } \Phi(\frac{\cdot}{h_1}) = [-h, h]$ die Behauptung folgt. $\diamond$

Zum Beweis des nächsten Satzes benötigen wir das

Lemma 2.4: Sei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx \neq 0$ und $\hat{\Phi} := \Phi / \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx$,

so gilt:

(i) $\hat{\Phi} \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Sei $\Phi \in \mathcal{D}$ gerade, dann ist $\hat{\Phi} \in C_{0,1}^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Ist $\Phi \in C_{0,m}^\infty(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, und $h > 0$, so ist auch

$$\Phi_h := \frac{1}{h} \cdot \Phi\left(\frac{\cdot}{h}\right) \in C_{0,m}^\infty(\mathbb{R}).$$

Beweis: Die Behauptungen (i) und (ii) ergeben sich sofort aus Satz 1.3.

ad (iii): Seien $p \in \Pi_m$, $x, y \in \mathbb{R}$, sowie $x' := x/h \in \mathbb{R}$ und $y' := y/h \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} (\Phi_h * p)(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{y}{h}\right) \cdot p(x-y) dy = \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} \Phi(y') \cdot p(x-h \cdot y') \cdot h dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(y') \cdot (p \circ h\pi_1)(x'-y') dy' = (\sharp * (p \circ h\pi_1))(x') \\ &= (p \circ h\pi_1)(x') = p(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wegen $p \circ h\pi_1 \in \Pi_m$ und $\Phi \in C_{0,m}^\infty(\mathbb{R})$. $\diamond$

Wie der folgende Satz nun zeigen wird, lassen sich ausgehend von einem Kern $\Phi \in C_{0,1}^\infty(\mathbb{R})$ Folgen von Kernen $\{\Phi_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\Phi_{(k)} \in C_{0,2k+1}^\infty(\mathbb{R})$ rekursiv berechnen. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ wurde das Verfahren bereits bei HILBERT [9] angewandt.

Satz 2.5: Seien $h > 0$, $0 < \alpha < 1$ und $\Phi \in C_{0,1}^\infty(\mathbb{R})$ eine nichtnegative, gerade Funktion mit $\text{supp } \Phi = [-1, 1]$. Die Funktionenfolge

$\{\Phi_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$(\Phi_{(0)})_h := \Phi_h \quad \text{und} \quad (\Phi_{(k)})_h := r_k \cdot (\Phi_{(k-1)})_h + (1-r_k) \cdot (\Phi_{(k-1)})_{\alpha \cdot h}$$

mit $r_k = \frac{\alpha}{2^{k-1}}$, $k \geq 1$. Dann gilt

$(\phi_{(k)})_h \in C_{0,2k+1}^\infty(\mathbb{R})$ und $\text{supp } (\phi_{(k)})_h = [-h, h]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion über k :

(i) $k=0$: Nach Lemma 2.4 gilt für ϕ_h die Behauptung.

(ii) $k \rightarrow k+1$: Die Induktionsvoraussetzung besagt

$(\phi_{(k)})_h \in C_{0,2k+1}^\infty(\mathbb{R})$. Aus der Rekursionsformel folgt die Geradheit von $(\phi_{(k)})_h$ und durch Zusammenfassen der Koeffizienten die Darstellung $(\phi_{(k)})_h = \sum_{i=0}^k a_{ki} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi(\frac{\cdot}{h_i})$ mit

gewissen Konstanten a_{ki} und $h_i = \alpha^i \cdot h$, $i=0, \dots, k$. Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 2.4(iii) gilt für das

gemäß der Behauptung gebildete $(\phi_{(k+1)})_h$ und für $p \in \Pi_{2k+1}$ die Gleichung $(\phi_{(k+1)})_h * p = r_{k+1} \cdot p + (1-r_{k+1}) \cdot p = p$. Auf Grund

der Konstruktion ist $(\phi_{(k+1)})_h$ gerade und durch Zusammenfassen der Koeffizienten erhalten wir die Darstellung

$(\phi_{(k+1)})_h = \sum_{i=0}^{k+1} a_{k+1,i} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \phi(\frac{\cdot}{h_i})$ mit bestimmten Konstanten $a_{k+1,i}$ und $h_i = \alpha^i \cdot h$, $i=0, \dots, k+1$. Nach dem Beweis von Satz

2.3 existiert genau ein gerades $\psi \in C_{0,2k+3}^\infty(\mathbb{R})$, das sich

als Linearkombination der $\phi_{\alpha^i \cdot h}$, $i=0, \dots, k+1$, schreiben

läßt. Damit bleibt zum Beweis der Behauptung nach Satz

1.3(ii') nur noch zu zeigen, daß $\int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k+1)})_h(x) dx = 0$

ist. Mit der Substitution $z := x/\alpha$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k+1)})_h(x) dx &= r_{k+1} \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k)})_h(x) dx \\ &\quad + (1-r_{k+1}) \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k)})_{\alpha \cdot h}(x) dx \\ &= r_{k+1} \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k)})_h(x) dx \\ &\quad + (1-r_{k+1}) \cdot \int_{\mathbb{R}} (\alpha z)^{2(k+1)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (\phi_{(k)})_h(z) \cdot \alpha dz \\ &= (r_{k+1} + (1-r_{k+1}) \cdot \alpha^{2(k+1)}) \cdot \int_{\mathbb{R}} x^{2(k+1)} \cdot (\phi_{(k)})_h(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\text{supp } (\phi_{(k+1)})_h = \text{supp } (\phi_{(k)})_h = \dots = \text{supp } (\phi_{(0)})_h = [-h, h]$

gilt die Behauptung. $\diamond$

Bemerkung: Die Koeffizienten in den Darstellungen der Kerne in den Sätzen 2.3 und 2.5 sind unabhängig von der Wahl des Grundkerns ϕ . $\diamond$

Die bisher konstruierten Kerne lassen, wie wir im Satz 5.1 sehen werden, die Funktionswerte gewisser Splines an inneren Punkten der Partitionsteilintervalle bei der Faltung unverändert, wenn wir die Träger hinreichend klein wählen. Da stückweise polynomiale Approximationsfunktionen häufig Interpolationsbedingungen an den Knotenstellen erfüllen, wo die einzelnen Teilpolynome aneinanderstoßen, werden wir jetzt Kerne aus $C_{0,2k+1}^{\infty}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, angeben, die auch die Werte von Splines und deren stetigen Ableitungen an diesen Stellen unter der Faltung reproduzieren.

Satz 2.6: Seien $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $\phi \in C_{0,2k+1}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ ein gerader Kern. Durch

$$\omega[\phi_h](x) := \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{1}{i!} \cdot (\phi_h^{(i)}(x-h) + (-1)^i \cdot \phi_h^{(i)}(x+h)) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad ,$$

ist dann eine gerade Funktion $\omega \in C_{0,2k+1}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \omega \subseteq [-2h, 2h]$ definiert. Für die stückweise polynomialen Funktionen $s \in C^n(\mathbb{R})$, $-1 \leq n \leq 2k+2$, mit

$$s|_{(-\infty, u)} = p_1 \quad \text{und} \quad s|_{(u, +\infty)} = p_2 \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad p_1, p_2 \in \Pi_{2k+1} \quad ,$$

gilt dann außerdem

$$(\omega * s)^{(v)}(u) = \begin{cases} s^{(v)}(u) & , \quad 0 \leq v \leq n \\ \frac{1}{2}(p_1^{(v)}(u) + p_2^{(v)}(u)) & , \quad v \geq n+1 \end{cases} \quad .$$

Beweis: Sei $p \in \Pi_{2k+1}$, so können wir wegen $\phi_h \in C_{0,2k+1}^{\infty}(\mathbb{R})$

und damit $(\phi_h * p)^{(v)} = (\phi_h)^{(v)} * p = p^{(v)}$, $v \in \mathbb{N}$, die Taylordarstellung von $p(x+y)$ schreiben als

$$p(x+y) = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{y^i}{i!} \cdot p^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{y^i}{i!} \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p)(x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Daraus erhalten wir für $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{2} (p((z-h)+h) + p((z+h)-h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{h^i}{i!} \cdot (p^{(i)}(z-h) + (-1)^i \cdot p^{(i)}(z+h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{h^i}{i!} \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p)(z-h) + (-1)^i \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p)(z+h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{1}{i!} \cdot \frac{h^i}{h^i} \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p)(z-h) + (-1)^i \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p)(z+h)) \\ &= (\omega[\phi_h] * p)(z) \end{aligned}$$

wegen Lemma 1.2(iii,5), d.h. $\omega \in C_{0,2k+1}^\infty(\mathbb{R})$. Für $v \in \mathbb{N}$ gilt

weiterhin

$$\begin{aligned} (\omega[\phi_h] * s)^{(v)}(u) &= (\omega[\phi_h]^{(v)} * s)(u) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{h^i}{i!} \cdot ((\phi_h)^{(i)} * s)^{(v)}(u-h) + (-1)^i \cdot ((\phi_h)^{(i)} * s)^{(v)}(u+h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{h^i}{i!} \cdot (((\phi_h)^{(i)} * p_1)^{(v)}(u-h) + (-1)^i \cdot ((\phi_h)^{(i)} * p_2)^{(v)}(u+h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (p_1^{(v)}((u-h)+h) + p_2^{(v)}((u+h)-h)) \end{aligned}$$

auf Grund von $\text{supp } \phi_h = [-h, h]$, d.h. es gilt die zweite Behauptung. Da aus der Darstellung von ω sofort $\text{supp } \omega \subseteq [-2h, 2h]$

folgt, bleibt nur noch die Geradheit von ω zu zeigen. Für

alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \omega(-x) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^k \frac{1}{(2i)!} \cdot (\phi_h^{(2i)}(-(x+h)) + \phi_h^{(2i)}(-(x-h))) \\ &\quad + \frac{1}{(2i+1)!} \cdot (\phi_h^{(2i+1)}(-(x+h)) - \phi_h^{(2i+1)}(-(x-h))) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^k \frac{1}{(2i)!} \cdot (\phi_h^{(2i)}(x+h) + \phi_h^{(2i)}(x-h)) \\ &\quad + \frac{1}{(2i+1)!} \cdot (-\phi_h^{(2i+1)}(x+h) + \phi_h^{(2i+1)}(x-h)) \\ &= \omega(x), \end{aligned}$$

da die Ableitungen gerader Funktionen ungerade und deren

Ableitungen wieder gerade sind. $\diamond$

§ 3 Konvergenz und Fehlerabschätzungen

Da wir die Faltung auf interpolierende Polynom-Splines anwenden wollen, um diese zu regularisieren, ist es notwendig zu untersuchen, wie sich dabei die Funktionswerte ändern, und die Norm des Faltungsoperators zu bestimmen. Dabei werden wir wesentlich die besonderen Eigenschaften von Kernen mit kompakten Trägern, die Polynome reproduzieren, ausnutzen. Aus einer expliziten Formel für die Differenz zwischen einem Polynom-Spline und seiner Regularisierung werden wir ein Verfahren zur direkten Berechnung der auftretenden Faltungsintegrale herleiten. Darüberhinaus werden wir Fehlerabschätzungen für die allgemeine Approximation von Funktionen durch Faltung erhalten. Wir beginnen mit einer Folgerung aus der Youngschen Ungleichung.

Korollar 3.1: Seien $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, $h > 0$,

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq \infty$ gegeben und die linearen Abbildungen

$T_h^{(p)}$ definiert durch

$$T_h^{(p)} : \begin{cases} L^p[a-h, b+h] \rightarrow L^p(I) \\ f \rightarrow \phi_h * f \end{cases}.$$

Dann sind die Operatornormen $\|T_h^{(p)}\|_p$ für alle p und h gleichmäßig beschränkt:

$$\|T_h^{(p)}\|_p \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Beweis: Für $x \in [a, b]$ werden zur Berechnung von $(\phi_h * f)(x)$ wegen $\text{supp } \phi_h = [-h, h]$ und

$$(\phi_h * f)(x) = (f * \phi_h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot \phi_h(y) dy$$

die Werte von f auf $[a-h, b+h]$ benötigt. Die durch

$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in [a-h, b+h] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ definierte Funktion $\hat{f}$ ist wegen

$$(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p dx)^{1/p} = (\int_{a-h}^{b+h} |f(x)|^p dx)^{1/p} = \|f\|_{L^p[a-h, b+h]}$$

in $L^p(\mathbb{R})$ und der Kern ϕ_h liegt in $L^1(\mathbb{R})$, denn

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_h(x)| dx = \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\phi(\frac{x}{h})| dx = \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)| \cdot h dy = \|\phi\|_1 < \infty ,$$

da $\phi \in \mathcal{D}$. Für $q := 1$ sind mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ alle Voraussetzungen von

Lemma 1.2(i) erfüllt. Also existiert $F := \hat{f} * \phi_h$ f.ü. und ist

in $L^r(\mathbb{R})$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{p}$, d.h. $r=p$. Weiterhin gilt zusammen

mit Lemma 1.2(iv)

$$\begin{aligned} \|\phi_h * f\|_{L^p(I)} &= \|\hat{f} * \phi_h\|_{L^p(I)} \leq \|F\|_p \leq \|\hat{f}\|_p \cdot \|\phi_h\|_1 \\ &= \|f\|_{L^p[a-h, b+h]} \cdot \|\phi\|_1 \end{aligned}$$

und für stetige f erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\phi_h * f\|_{C(I)} &= \|\phi_h * f\|_{L^\infty(I)} \leq \|\phi\|_1 \cdot \|f\|_{L^\infty[a-h, b+h]} \\ &= \|\phi\|_1 \cdot \|f\|_{C[a-h, b+h]} \cdot \phi \end{aligned}$$

Da die Polynom-Spline-Interpolation ein stetiger und linearer

Operator ist, ist auch die Komposition dieser Abbildung mit

$T_h^{(\infty)}$, $h>0$, stetig. Bilden wir $T_h^{(\infty)} \circ P_n$ für eine Folge gleich-

mäßig beschränkter Spline-Projektoren $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so sind die

Abbildungen $\{T_h^{(\infty)} \circ P_n \mid n \in \mathbb{N}, h>0\}$ ebenfalls gleichmäßig

beschränkt.

Als Grundlage für unsere weiteren Betrachtungen und die

Fehlerabschätzungen in Satz 5.3 beweisen wir nun den

Satz 3.2: Der gerade Kern ϕ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ sei in

$C_{0, 2k+1}^\infty(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$. Die Zahl z zerlege $\mathbb{R}$ in die beiden

Intervalle $I_1 := (-\infty, z)$ und $I_2 := (z, +\infty)$. Aus den Polynomen

$p_1, p_2 \in \Pi_m$, $0 \leq m \leq 2k+1$, sei die Funktion $s \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $0 \leq n \leq m+1$,

derart konstruiert, daß $s|_{I_i} = p_i$, $i=1,2$, gelte. Für $j=n, \dots, m$ sei weiterhin $\Delta_j := p_2^{(j)}(z) - p_1^{(j)}(z)$. Dann gilt für alle $h>0$ und $j=0, \dots, n$:

$$(i) \quad \frac{d^j}{dx^j} ((\phi_h * s)(x) - s(x)) = \sum_{l=n}^m (-1)^{j+(i-1)(j+1+1)} \cdot \frac{h^{1-j} \cdot \Delta_1}{1!} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} (u - \frac{|x-z|}{h})_+^{1-\phi(j)}(u) du,$$

$$x \in I_i, \quad i=1,2;$$

$$(ii) \quad \|D^j(s - \phi_h * s)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \sum_{l=n}^m \frac{2^{1/p} \cdot C(\phi, j, 1)}{1!} \cdot |\Delta_1| \cdot h^{1-j+1/p}$$

$$= \theta(\sum_{l=n}^m |\Delta_1| \cdot h^{1-j+1/p})$$

für $1 \leq p \leq \infty$ und nur von ϕ , j und l abhängige Konstanten $C(\phi, j, 1)$.

(iii) Ist j gerade (ungerade) und verschwinden alle Δ_1 für ungerade (gerade) l , so folgt speziell für $x=z$:

$$|(\phi_h * s)^{(j)}(z) - s^{(j)}(z)| = |\frac{1}{2} \cdot \Delta_j \cdot \sum_{l=n}^m \delta_{jl}|.$$

Beweis: Der Spline s läßt sich für $t \in \mathbb{R}$ nach Voraussetzung darstellen als

$$s(t) = \begin{cases} p_1(t) + \sum_{l=1}^m \frac{\Delta_l}{l!} \cdot (t-z)_+^l =: (p_1 + q_1)(t) \\ p_2(t) - \sum_{l=n}^m \frac{\Delta_l}{l!} \cdot (t-z)_-^l =: (p_2 + q_2)(t) \end{cases}.$$

Dann gilt für $x \in I_i$, $i=1,2$, $h>0$ und $0 \leq j \leq n$ wegen $\phi \in C_{0,m}^\infty(\mathbb{R})$

und der Geradheit von ϕ :

$$\frac{d^j}{dx^j} ((\phi_h * s)(x) - s(x)) = \frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} (s(x+y) - s(x)) \cdot \phi(\frac{y}{h}) dy =$$

$$\frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{p_i^{(1)}(x)}{1!} \cdot \int_{\mathbb{R}} y^1 \cdot \phi(\frac{y}{h}) dy + \frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} q_i(x+y) \cdot \phi(\frac{y}{h}) dy =$$

$$\frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} q_i(y) \cdot \phi(\frac{y-x}{h}) dy = \frac{(-1)^j}{h^{j+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}} q_i(y) \cdot \phi^{(j)}(\frac{y-x}{h}) dy =$$

$$\frac{(-1)^j}{h^{j+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}} q_i(x+y) \cdot \phi^{(j)}(\frac{y}{h}) dy =$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \binom{j}{h} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \sum_{l=n}^m \frac{\Delta_1}{l!} \cdot f_{\mathbb{R}} (x+y-z)_+^{l, (-)} \cdot \phi^{(j)} \left(\frac{y}{h} \right) dy = \\
 & \binom{j}{h} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \sum_{l=n}^m \frac{\Delta_1}{l!} \cdot f_{\mathbb{R}} ((x-z)+hu)_+^{l, (-)} \cdot \phi^{(j)}(u) \cdot h du = \\
 & \binom{j}{h} (-1)^j \cdot \sum_{l=n}^m h^{1-j} \cdot \frac{\Delta_1}{l!} \cdot f_{\mathbb{R}} \left(u + \frac{x-z}{h} \right)_+^{l, (-)} \cdot \phi^{(j)}(u) du = \\
 & \sum_{l=n}^m (-1)^{j+(i-1)(j+1+1)} \cdot h^{1-j} \cdot \frac{\Delta_1}{l!} \cdot f_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^{l, (-)} \cdot \phi^{(j)}(u) du,
 \end{aligned}$$

d.h. es gilt (i). Zum Beweis des letzten Schrittes unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $x \in I_1$, d.h. $x < z$. Da $x-z$ negativ ist, gilt

$$x-z = -|x-z|, \text{ also } \left(u + \frac{x-z}{h} \right)_+^1 = \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^1.$$

2. Fall: $x \in I_2$, d.h. $x > z$. Wegen $x-z = |x-z|$ und mit $v := -u$ haben wir

$$\begin{aligned}
 & - \left(u + \frac{x-z}{h} \right)_-^1 = - \left(u + \frac{|x-z|}{h} \right)_-^1 = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , u > -\frac{|x-z|}{h} \\ - \left(u + \frac{|x-z|}{h} \right)^1 & , u \leq -\frac{|x-z|}{h} \end{array} \right\} = \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , v < \frac{|x-z|}{h} \\ - \left(-v + \frac{|x-z|}{h} \right)^1 & , v \geq \frac{|x-z|}{h} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , v < \frac{|x-z|}{h} \\ - (-1)^1 \cdot \left(v - \frac{|x-z|}{h} \right)^1 & , v \geq \frac{|x-z|}{h} \end{array} \right\} = \\
 & - (-1)^1 \cdot \left(v - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^1. \text{ Da } \phi \text{ eine gerade Funktion ist,} \\
 & \text{sind ihre (un-) geradzahigen Ableitungen (un-)} \\
 & \text{gerade, d.h. } \phi^{(j)}(-v) = (-1)^j \cdot \phi^{(j)}(v) \text{ f\"ur } j \in \mathbb{N} \text{ und} \\
 & v \in \mathbb{R}. \text{ Damit folgt} \\
 & - \int_{\mathbb{R}} \left(u + \frac{x-z}{h} \right)_-^1 \cdot \phi^{(j)}(u) du = \\
 & (-1)^{j+1} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(v - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^1 \cdot \phi^{(j)}(v) \cdot (-1) dv.
 \end{aligned}$$

Ausgehend von der Beziehung (i) erhalten wir für $j=0, \dots, n$ und $1 \leq p \leq \infty$:

$$\| D^j (s - \phi_h * s) \|_p \leq \sum_{l=n}^m \frac{h^{1-j} \cdot |\Delta_1|}{l!} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^1 \cdot \phi^{(j)}(u) du \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=: \sum_{l=0}^m K(\phi, p, h, j, l) \cdot \frac{h^{1-j} \cdot |\Delta_1|}{l!} \quad \text{mit}$$

$$K(\phi, p, h, j, l) := \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^{1-j} \cdot \phi^{(j)}(u) du \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Aus $\text{supp } \phi^{(j)} \subseteq [-1, 1]$ folgt nun

$$\begin{aligned} K(\phi, p, h, j, l) &= \left(\int_{z-h}^{z+h} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^{1-j} \cdot \phi^{(j)}(u) du \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq (2h) \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^{1-j} \cdot \phi^{(j)}(u) du \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq (2h)^{1/p} \cdot \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-z|}{h} \right)_+^{1-j} \cdot |\phi^{(j)}(u)|^p du \right)^{1/p} \right\} \\ &= (2h)^{1/p} \cdot \int_{\mathbb{R}} u_+^{1-j} \cdot |\phi^{(j)}(u)| du \\ &=: (2h)^{1/p} \cdot C(\phi, j, l). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich (ii).

Zum Beweis von (iii) zeigen wir zuerst, daß

$$\int_{\mathbb{R}} y^v \cdot \phi^{(j)}(y) dy = (-1)^j \cdot j! \cdot \delta_{j,v} \quad \text{für } j \in \mathbb{N} \text{ und } v=0, \dots, 2k+1 \text{ gilt.}$$

Sei $p \in \Pi_{2k+1}$, so gilt $p * \phi = p$, woraus für alle $j \in \mathbb{N}$ die Beziehung $D^j p = p * \phi^{(j)}$ folgt. Das bedeutet insbesondere für die Monome π_i , $i=0, \dots, 2k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dx^j} x^i &= \frac{i!}{(i-j)!} x^{i-j} = \int_{\mathbb{R}} (x-y)^i \cdot \phi^{(j)}(y) dy \\ &= \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} x^{i-v} \cdot (-1)^v \cdot \int_{\mathbb{R}} y^v \cdot \phi^{(j)}(y) dy. \end{aligned}$$

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Monome erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\int_{\mathbb{R}} y^v \cdot \phi^{(j)}(y) dy = 0 \quad \text{für } v \neq j \text{ und}$$

$$\frac{i!}{(i-j)!} x^{i-j} = \binom{i}{j} x^{i-j} \cdot (-1)^j \cdot \int_{\mathbb{R}} y^j \cdot \phi^{(j)}(y) dy \quad \text{für } v=j.$$

Wegen $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ folgt daraus $\int_{\mathbb{R}} y^j \cdot \phi^{(j)}(y) dy = (-1)^j \cdot j!$ und somit die Zwischenbehauptung.

Da π_1 für (un-) gerades $l \in \mathbb{N}$ eine (un-) gerade Funktion ist, erhalten wir nach dem bereits oben über die Symmetrieeigenschaften der Ableitungen von ϕ Gesagten, daß $\pi_1 \cdot \phi^{(j)}$

für (un-) gerade $j, l \in \mathbb{N}$ gerade ist. Für solche j und l mit $l \leq 2k+1$ gilt nach dem oben Gezeigten dann

$$\int_{\mathbb{R}} u_+^{1 \cdot \phi(j)}(u) du = \int_0^\infty u^{1 \cdot \phi(j)}(u) du = \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}} u^{1 \cdot \phi(j)}(u) du = \frac{1}{2} \cdot (-1)^j \cdot j! \cdot \delta_{j1}.$$

Setzen wir nun für x in (i) $z + 0 \in I_2$ ein, so liefern diese Gleichungen für gerades (ungerades) $0 \leq j \leq n$, wenn die Indizes l für alle nichtverschwindenden Δ_l gerade (ungerade) sind,

(iii):

$$\begin{aligned} (\phi_h * s)^{(j)}(z) - s^{(j)}(z+0) &= \sum_{l=n}^m (-1)^{2j+l+1} \cdot \frac{h^{1-j} \cdot \Delta_l}{l!} \cdot \int_{\mathbb{R}} u_+^{1 \cdot \phi(j)}(u) du \\ &= \sum_{l=n}^m \frac{1}{2} \cdot (-1)^{j+1+1} \cdot h^{1-j} \cdot \Delta_l \cdot \frac{j!}{l!} \cdot \delta_{j1} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \Delta_j \cdot \sum_{l=n}^m \delta_{j1}. \end{aligned}$$

Eine entsprechende Rechnung für $x = z - 0 \in I_1$ liefert die Behauptung. $\diamond$

Auf der Basis der Formel 3.2(i) werden wir uns nun mit der expliziten Berechnung der Faltungsintegrale $\phi_h * s$ beschäftigen.

Dazu definieren wir für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ die n -ten iterierten Integrale von ϕ durch

$$\begin{aligned} (J^n \phi)(x) &:= \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^x (x-t)^{n-1} \cdot \phi(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+^{n-1} \cdot \phi(t) dt, \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\frac{d}{dx} (J^n \phi)(x) = (J^{n-1} \phi)(x) \quad \text{mit} \quad (J^0 \phi)(x) := \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.3: Sei $m \in \mathbb{N}$, $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < h \leq \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \cdot \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i) \quad \text{und} \quad s \in \Pi_m \{\pi\} \cap C^{v-1}(\mathbb{R}), \quad 0 \leq v \leq m.$$

Weiterhin sei $\phi \in C_{0,2}^\infty[\frac{m}{2}+1](\mathbb{R})$ gerade mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$.

Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und alle $j \in \mathbb{N}$:

- (i) $\frac{d^j}{dx^j}(\phi_h * s)(x) = \frac{d^j}{dx^j}s(x)$, wenn $\pi \cap (x-h, x+h) = \emptyset$;
- (ii) $\frac{d^j}{dx^j}(\phi_h * s)(x) = \frac{d^j}{dx^j}s(x) + \sum_{l=v}^m (-1)^{(i-1)(j+l+1)} \cdot h^{1-j} \times$
 $\times (s^{(1)}(x_k+0) - s^{(1)}(x_k-0)) \cdot (J^{1+l-j}\phi)\left(-\frac{|x-x_k|}{h}\right)$,
 wenn für $k \in \{0, \dots, n+1\}$ gilt $\{x_k\} = \pi \cap (x-h, x+h)$ und
- $$i = \begin{cases} 1, & x < x_k \\ 2, & x > x_k \end{cases} \text{ sei.}$$

Beweis: Der Fall (i) ergibt sich trivialerweise, da

$s|_{(x-h, x+h)} \in \mathbb{P}_m$ und $\phi \in C_{0,2}^{\infty} \cdot [\frac{m}{2}+1](\mathbb{R})$ gilt. Ansonsten liegt auf Grund der Wahl von h genau ein Partitionspunkt x_k in $(x-h, x+h)$, so daß die gleiche Situation wie in Satz 3.2

vorliegt. Die Formel 3.2(i) liefert

$$(\phi_h * s)(x) = s(x) + \sum_{l=v}^m (-1)^{(i-1)(l+1)} \cdot h^1 \cdot (s^{(1)}(x_k+0) - s^{(1)}(x_k-0)) \times$$

$$\times \frac{1}{l!} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-x_k|}{h}\right)_+^l \cdot \phi(u) du .$$

Wir formen obiges Integral mit Hilfe der Substitution

$u := -v$ unter Ausnutzung der Geradheit von ϕ um, wobei wir $-|x-x_k|/h$ durch t abkürzen:

$$\frac{1}{l!} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-x_k|}{h}\right)_+^l \cdot \phi(u) du = \frac{1}{l!} \cdot \int_{-t}^1 (u+t)^l \cdot \phi(u) du =$$

$$\frac{1}{l!} \cdot \int_{-1}^t (t-v)^l \cdot \phi(v) dv = \frac{1}{l!} \cdot \int_{\mathbb{R}} (t-v)_+^l \cdot \phi(v) dv = (J^{1+l}\phi)(t) .$$

Wegen $J^\mu \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$ und $\frac{dt}{dx} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{h}$ ergibt sich sofort die Formel (ii). $\diamond$

Bemerkung 3.4: Da man die Ableitungen von $\phi \in C_{0,m}^{\infty}(\mathbb{R})$ sehr oft explizit angeben kann, braucht man die Faltungen $(\phi_h * s)^{(j)}(x)$ nicht numerisch zu integrieren, wenn gute Approximationen für $J^1\phi$, $i=1, \dots, m+1$, bekannt sind. Diese lassen sich aus Approximationen von $J^1\psi$, $\psi \in C_{0,1}^{\infty}(\mathbb{R})$

mit $\text{supp } \psi = [-1, 1]$, linear kombinieren, wenn ϕ eine gemäß der Sätze 2.3, 2.5 oder 2.6 konstruierte Linearkombination gewisser ψ_{h_ν} mit paarweise verschiedenen h_ν ist. Weiterhin läßt sich ausnutzen, daß $J^i \psi|_{(-\infty, -1]}$ und $J^i \psi|_{[1, \infty)}$ Polynome sind: $(J^i \psi)(x) = 0$, $x \in (-\infty, -1]$ und

$$(J^i \psi)(x) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} (J^{i-j} \psi)(1) \cdot (x-1)^j, \quad x \in [1, \infty) \text{ und } i \geq 1. \diamond$$

Eine Darstellung von $J^i \phi$, $\phi \in C_{o,m}^\infty(\mathbb{R})$, für Argumente rechts von $\text{supp } \phi$ folgt aus dem

Lemma 3.5: Sei $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-h, h]$

Dann ist $\phi \in C_{o,m}^\infty(\mathbb{R})$ genau dann, wenn

$$(J^{i+1} \phi)(h) = \frac{h^i}{i!}, \quad i = 0, \dots, m,$$

gilt. Also ist

$$(J^{i+1} \phi)(x) = \sum_{j=0}^i \frac{h^{i-j}}{j! \cdot (i-j)!} \cdot (x-h)^j \text{ für } i = 0, \dots, m \text{ und } x \in [h, \infty).$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \Pi_m$, so gilt

$$\begin{aligned} (\phi * p)(x) &= \int_{-h}^h p(x-y) \cdot \phi(y) dy \\ &= [p(x-y) \cdot J^1 \phi(y)]_{-h}^h + \int_{-h}^h p'(x-y) \cdot (J^1 \phi)(y) dy \\ &= p(x-h) \cdot (J^1 \phi)(h) + \int_{-h}^h p'(x-y) \cdot (J^1 \phi)(y) dy. \end{aligned}$$

Wiederholte partielle Integration liefert nun

$$\begin{aligned} (\phi * p)(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} p^{(i)}(x-h) \cdot (J^{i+1} \phi)(h) + \int_{-h}^h p^{(m)}(x-y) \cdot (J^m \phi)(y) dy \\ &= \sum_{i=0}^m p^{(i)}(x-h) \cdot (J^{i+1} \phi)(h), \end{aligned}$$

da $p^{(m)}$ eine konstante Funktion ist. Das Polynom p hat

bzgl. des Entwicklungspunktes $(x-h)$ die Darstellung

$$p(y) = \sum_{i=0}^m \frac{p^{(i)}(x-h)}{i!} \cdot (y-(x-h))^i. \text{ Durch Koeffizientenvergleich}$$

folgt aus der Bedingung $\phi * p = p$ die Behauptung. $\diamond$

Beispiel 3.6: Unter Verwendung des Satzes 3.3 und der

dortigen Bezeichnungen soll nun das Verhalten von

$D^j(\phi_h * s - s)$ am Beispiel des durch

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{6}(2+x)^3 & , \quad x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{6}(4-6x^2-3x^3) & , \quad x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{6}(4-6x^2+3x^3) & , \quad x \in [0, 1] \\ \frac{1}{6}(2-x)^3 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

definierten kubischen "B-Spline" b in der Nähe des Knotens $x_k=0$ untersucht werden. Wegen $b \in \Pi_3\{-2, -1, 0, 1, 2\} \cap C^2(\mathbb{R})$ und $b^{(3)}(+0) - b^{(3)}(-0) = 3 - (-3) = 6$ gilt nach Satz 3.3 (ii) für $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $0 < h \leq \frac{1}{2}$, $\phi \in C_{0,3}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ und $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^j}{dx^j} (\phi_h * b - b)(x) = (-1)^{j+4} \cdot h^{3-j} \cdot 6 \cdot (J^{4-j} \phi) \left(-\frac{x}{h}\right).$$

Zur Konstruktion eines geeigneten Kernels ϕ gehen wir von der durch

$$\mu(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & , \quad x \in (-1, 1) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

definierten geraden und nichtnegativen Funktion $\mu \in \mathcal{D}$ aus.

Nach Lemma 2.4(ii) ist dann $\rho := (\int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx)^{-1} \cdot \mu = C \cdot \mu \in C_{0,1}^\infty(\mathbb{R})$

mit $\text{supp } \rho = [-1, 1]$ und $C = 2,252283621 \dots$. Gemäß Satz 2.5

bilden wir mit ρ , $h=1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ den Faktor $r_1 = \frac{1/4}{1/4-1} = -\frac{1}{3}$

und damit den Kern $\phi \in C_{0,3}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, der sich

durch

$$\phi(x) = -\frac{1}{3} \cdot \rho(x) + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \rho\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{8}{3} \cdot \rho(2x) - \frac{1}{3} \cdot \rho(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

darstellen läßt. Nun berechnen wir die iterierten Integrale

$J^{n+1} \phi$, $n \in \mathbb{N}$, unter Ausnutzung der Linearität der Operatoren

J^{n+1} :

$$(J^{n+1} \phi)(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{-\infty}^x (x-t)^n \phi(t) dt - \frac{1}{n!} \cdot \int_{-\infty}^x (2t-x)^n \phi(t) dt$$

1	PHI*B-R	D(PHI*B-E)
0	-6.3938967813E-04	0.0000000000E-01
1	-6.2635179516E-04	1.7868283682E-03
2	-5.9211161481E-04	3.0647279399E-03
3	-5.4325621619E-04	3.9026639220E-03
4	-4.8541988441E-04	4.3691673680E-03
5	-4.2330575262E-04	4.5296806680E-03
6	-3.6071663733E-04	4.4478566404E-03
7	-3.0059723202E-04	4.1837935466E-03
8	-2.4508447949E-04	3.7933872065E-03
9	-1.9557440423E-04	3.3273816918E-03
10	-1.5279991936E-04	2.8303049021E-03
11	-1.1692541616E-04	2.3352921573E-03
12	-8.7658026164E-05	1.8828462172E-03
13	-6.4375624661E-05	1.4797204729E-03
14	-4.6267276001E-05	1.1383513944E-03
15	-3.2471626974E-05	8.5795059564E-04
16	-2.2181743000E-05	6.3230573730E-04
17	-1.4687852056E-05	4.5413506600E-04
18	-9.3793341724E-06	3.1648679135E-04
19	-5.7391191421E-06	2.1265187097E-04
20	-3.3373816685E-06	1.3718256707E-04
21	-1.8246933617E-06	8.3952253237E-05
22	-9.2461541146E-07	4.8185701859E-05
23	-4.2573776381E-07	2.5500424147E-05
24	-1.7318906178E-07	1.2142654433E-05
25	-5.9697635625E-08	5.0160463685E-06
26	-1.6330669468E-08	1.6968723659E-06
27	-3.1750731659E-09	4.2623901099E-07
28	-3.5743961342E-10	6.6160555134E-08
29	-1.5005678415E-11	4.2576012862E-09
30	-7.0890597284E-14	3.7691840675E-11
31	-1.8730088244E-19	3.1277066077E-16
32	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
33	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
34	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
35	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
36	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01

TAFELLE 1

1	P2(PH1+E-D)	P3(PH1*9-E)
0	1.4864622120E-01	-3.0000000000E+00
1	1.0949509183E-01	-2.6380243360E+00
2	7.5353175699E-02	-2.2792030152E+00
3	4.6154360933E-02	-1.9267666232E+00
4	2.1786681991E-02	-1.5841011009E+00
5	2.0695817579E-03	-1.2548323113E+00
6	-1.3150048411E-02	-9.4291773880E-01
7	-2.4203150713E-02	-6.6274459712E-01
8	-3.1409156331E-02	-3.8922755808E-01
9	-3.5163884549E-02	-1.5788442080E-01
10	-3.5968036647E-02	3.5168366279E-02
11	-3.4394316542E-02	1.8344771704E-01
12	-3.1107811907E-02	2.8692907845E-01
13	-2.6842260487E-02	3.2433158121E-01
14	-2.2329197131E-02	3.1849747678E-01
15	-1.8129556271E-02	2.8401093619E-01
16	-1.4451485514E-02	2.4593466655E-01
17	-1.1288530293E-02	2.0989074523E-01
18	-8.6107600540E-03	1.7610010262E-01
19	-6.3855057329E-03	1.4476249295E-01
20	-4.5772666246E-03	1.1606461036E-01
21	-3.1476489047E-03	9.0275901821E-02
22	-2.0553681923E-03	6.7541315467E-02
23	-1.2563924623E-03	4.8069047403E-02
24	-7.0430233096E-04	3.2010500231E-02
25	-3.9100672153E-04	1.9448449090E-02
26	-1.4801136025E-04	1.0348414907E-02
27	-4.8503319544E-05	4.4895978255E-03
28	-1.0508602229E-05	1.3826130046E-03
29	-1.0536146161E-06	2.2108317877E-04
30	-1.7887012339E-08	7.4302319216E-06
31	-4.8370619130E-12	6.8669575036E-10
32	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
33	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
34	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
35	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01
36	0.0000000000E-01	0.0000000000E-01

TABLE 2

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_{-\infty}^x (x-t)^n \cdot \rho(t) dt + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_{-\infty}^{2x} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (2x-s)^n \cdot \rho(s) \cdot \frac{1}{2} ds \\
 &= \frac{2^{2-n}}{3} \cdot (J^{n+1} \rho)(2x) - \frac{1}{3} (J^{n+1} \rho)(x).
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $h := \frac{32}{72} < \frac{1}{2}$ für $j=0, \dots, 3$ und $i=0, \dots, 36$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^j}{dx^j} (\phi_h * b-b) \left(\frac{i}{72}\right) &= -6 \cdot \left(-\frac{32}{72}\right)^{3-j} \cdot (J^{4-j} \phi) \left(-\frac{i/72}{32/72}\right) \\
 &= a_j \cdot \{2^{j-1} \cdot (J^{4-j} \rho) \left(-\frac{i}{16}\right) - (J^{4-j} \rho) \left(-\frac{i}{32}\right)\}
 \end{aligned}$$

mit $a_0 = \frac{128}{729}$, $a_1 = -\frac{32}{81}$, $a_2 = \frac{8}{9}$ und $a_3 = -2$.

Die Berechnung dieser Ausdrücke, insbesondere der iterierten Integrale von ρ nach dem Romberg-Verfahren, wurde doppelt-genau ausgeführt. Die auf elf signifikante Stellen gerundeten Ergebnisse sind für $j=0,1$ und $j=2,3$ in den Tabellen 1 bzw. 2 aufgelistet. $\diamond$

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen dazu verwenden, Fehlerabschätzungen für die Approximation stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen durch Faltungsintegrale mit den nach § 2 konstruierten Kernen anzugeben. Zunächst gilt der

Satz 3.7 (vgl. HOFF [10]): Seien $\phi \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, $h > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Ist $f: [x-h_0, x+h_0] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig für $h_0 > 0$, so gilt für $h_0 \geq h > 0$:

$$|f(x) - (\phi_h * f)(x)| \leq \|\phi\|_1 \cdot \omega(f, h) = \mathcal{O}(\omega(f, h)),$$

d.h. $(\phi_h * f)(x)$ konvergiert gegen $f(x)$ für $h \rightarrow 0$.

Beweis: Sei $h \leq h_0$, dann gilt wegen $\phi_h \in C_{0,0}^\infty(\mathbb{R})$

$$|f(x) - (\phi_h * f)(x)| = \left| \int_{x-h}^{x+h} (f(y) - f(x)) \cdot \frac{1}{h} \cdot \phi\left(\frac{x-y}{h}\right) dy \right| \leq$$

$$\sup_{|t| \leq h} |f(x+t) - f(x)| \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\phi\left(\frac{y}{h}\right)| dy \leq \omega(f, h) \cdot \|\phi\|_1,$$

da $\|\phi\|_1$ nach dem Beweis von Korollar 3.1 beschränkt ist. $\diamond$

Unabhängig von ihrer Glätte kann eine Funktion f nach einem Satz von BUTZER [5] durch die Faltung mit nichtnegativen Kernen höchstens von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ approximiert werden.

Nach BUTZER [5] gilt allgemein für Kerne ϕ mit $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2k}} \cdot \left\{ (\phi_h * f)(x) - f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}} t^{2i} \cdot \phi(t) dt \cdot \frac{1}{(2i)!} \cdot h^{2i} \cdot f^{(2i)}(x) \right\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} t^{2k} \cdot \phi(t) dt \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot f^{(2k)}(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

wo $f^{(2k)}$ existiert und von 0 verschieden ist. Zur Steigerung der Konvergenzrate ist also

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2i} \phi(t) dt = \delta_{0i}, \quad i=0, \dots, j \text{ und } j < k,$$

hinreichend. Diese Gleichungen sind aber nach Satz 1.3 bei geraden Kernen äquivalent mit $\phi * p = p$, $p \in \Pi_{2j+1}$. Anschaulich gesprochen wird der polynomiale Teil der Taylordarstellung von f bei der Faltung reproduziert. Ist $\phi \in C_{0,2k-1}^{\infty}(\mathbb{R})$, so ist $\mathcal{O}(h^{2k})$ die höchst mögliche Approximationsordnung nach obiger Formel. Die angekündigten Fehlerabschätzungen für die Approximation differenzierbarer Funktionen durch Faltungen mit Kernen aus $C_{0,n}^{\infty}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, werden wir jetzt nach der Methode von Peano aus dem Satz 3.2 und dem Taylorschen Satz gewinnen.

Satz 3.8: Gegeben sei das Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und seine Erweiterungen $I_h := [a-h, b+h]$ für $0 < h \leq h_0$. Die Funktion f sei in $C^n(I_{h_0})$, $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $f^{(n+1)} \in L^p(I_{h_0})$, $1 \leq p \leq \infty$. Ist $\phi \in C_{0,n}^{\infty}(\mathbb{R})$ gerade mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, so gilt für $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$$\| D^j (f - \phi_h * f) \|_{p, I} \leq \frac{1}{n!} \cdot 2^q \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}} \cdot C(\phi, j, n) \cdot h^{n-j+1/q} \cdot \| D^{n+1} f \|_{p, I_h},$$

$$j=0, \dots, n,$$

mit den Konstanten $C(\phi, j, n)$ aus Satz 3.2(ii).

Beweis: Nach dem Taylorschen Satz gibt es ein Polynom

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \cdot (x-a+h)^i \cdot f^{(i)}(a-h) \text{ aus } \Pi_n, \text{ derart, da\ss sich } f \text{ mit } s(x,t) := (x-t)_+^n \text{ darstellen l\aa\ss t als}$$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} s(x,t) \cdot f^{(n+1)}(t) dt.$$

Es bezeichne " $_{(x)}$ " die Faltung bzgl. der Variablen x , so gilt wegen $\Phi \in C_{0,n}^\infty(\mathbb{R})$ und nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dx^j} (f(x) - (\Phi_h * f)(x)) &= \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} s(x,t) \cdot f^{(n+1)}(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} (\Phi_h * s(\cdot, t))_{(x)}(x) \cdot f^{(n+1)}(t) dt \right) = \\ &\quad \frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{\partial^j}{\partial x^j} (s(x,t) - (\Phi_h * s(\cdot, t))_{(x)}(x)) dt. \end{aligned}$$

Die Funktion $s(x, \cdot)$ reduziert sich f\ur x < t und x > t jeweils auf ein Polynom n-ten Grades, ist in $C^{n-1}(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\Delta_n := \frac{\partial^n}{\partial x^n} s(t+0, t) - \frac{\partial^j}{\partial x^n} s(t-0, t) = n!. \text{ Also ist Satz 3.2(i) anwendbar. Mit der H\olderschen Ungleichung folgt nun:}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^j}{dx^j} (f(x) - (\Phi_h * f)(x)) \right|^p &\leq \\ \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} \left| f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{\partial^j}{\partial x^j} (s(x,t) - (\Phi_h * s(\cdot, t))_{(x)}(x)) \right| dt \right\}^p &= \\ \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \int_{I_h} \left| f^{(n+1)}(t) \cdot \eta \cdot h^{n-j} \cdot \frac{n!}{n!} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-t|}{h} \right)_+^{n-\Phi^{(j)}}(u) du \right| dt \right\}^p &\leq \\ \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \| f^{(n+1)} \|_{p, I_h} \cdot h^{n-j} \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|\cdot-x|}{h} \right)_+^{n-\Phi^{(j)}}(u) du \right\|_{q, I_h} \right\}^p & \end{aligned}$$

mit $\eta \in \{\pm 1\}$ und weil $\int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|x-t|}{h} \right)_+^{n-\Phi^{(j)}}(u) du$ als Funktion von t stetig und damit in $L^q(I_h)$ ist. F\ur alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz 3.2(ii):

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \left(u - \frac{|\cdot-x|}{h} \right)_+^{n-\Phi^{(j)}}(u) du \right\|_{q, I_h} \leq K(\Phi, q, h, j, n) \leq (2h)^{\frac{1}{q}} \cdot C(\Phi, j, n).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung:

$$\begin{aligned} \| D^j (f - \phi_h * f) \|_{p, I} &= \left\{ \int_I \left| \frac{d^j}{dx^j} (f(x) - (\phi_h * f)(x)) \right|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{n!} \cdot 2^{1/q} \cdot C(\phi, j, n) \cdot h^{n-j+1/q} \cdot \| D^{n+1} f \|_{p, I_h} \cdot \left(\int_I dx \right)^{1/p}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Kapitel II Regularisierung von Polynom-Spline-Funktionen

§ 4 Mittelpunkt-Splines geraden Grades

Im letzten Paragraphen haben wir bereits die Differenz zwischen Polynom-Splines und ihren Regularisierungen bestimmt. Zur Fehlerabschätzung für die Interpolation mit regularisierten Splines benötigen wir aber auch Aussagen über die Fehler bei der Polynom-Spline-Interpolation. Während wir dabei im Falle von Splines ungeraden Grades auf bekannte Resultate zurückgreifen können, müssen wir die entsprechenden Ergebnisse für Splines geraden Grades noch beweisen. Im folgenden werden wir zeigen, daß es möglich ist, Elemente des Raumes der Spline-Funktionen bzgl. der Partition π des kompakten reellen Intervalls I vom Grade $2k$, $k \geq 1$, aus $C^{2k-1}(\mathbb{R})$ zu finden, die jeweils in den Mittelpunkten der durch π induzierten Teilintervalle von I Interpolationsbedingungen erfüllen. Bei geeigneter Wahl der Träger lassen sich aus diesen Mittelpunkt-Splines bereits mit den in den Sätzen 2.1, 2.3 und 2.5 definierten Faltungskernen interpolierende C^∞ -Funktionen konstruieren.

Im Satz 4.5 werden wir die Ergebnisse dieses Paragraphen und die für die Untersuchungen in § 5 nötigen Aussagen über Splines ungeraden Grades zusammenfassen.

Sei $\pi: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}=b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition des Intervalls $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$. Wir definieren $\|\pi\| := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$,

$\Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$ und $\beta := \|\pi\| / \Delta$, sowie

$x_{i+1/2} := \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $i=0, \dots, n$. Dann gilt der folgende

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für interpolierende Mittelpunkt-Splines geraden Grades.

Satz 4.1: Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^{k-1}(I)$. Dann gibt es genau eine Spline-Funktion $s \in \Pi_{2k}\{\pi\} \cap C^{2k-1}(\mathbb{R})$ bzgl. f und π , die die Interpolationsbedingungen

$$s(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}), \quad i=0, \dots, n,$$

und die Hermite-Randbedingungen

$$s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i=0, n+1 \text{ und } j=0, \dots, k-1,$$

erfüllt.

Beweis: Sei $s \in \Pi_{2k}\{\pi\} \cap C^{2k-1}(\mathbb{R})$, dann gibt es $2k+1+n$ reelle Zahlen a_j , $j=0, \dots, 2k$, und c_i , $i=1, \dots, n$, derart, daß sich s darstellen läßt als

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2k} a_j \cdot x^j + \sum_{i=1}^n c_i \cdot (x - x_i)^{2k}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir erweitern nun π nach links um $2k$ paarweise verschiedene Punkte zur Partition $\#$:

$$\# : x_{-2k} < x_{-2k+1} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}.$$

Wie man leicht unter Verwendung der Tatsache nachprüft, daß der Wert der Vandermondschen Determinante bzgl. der Knoten $\{x_l \mid l=-2k, \dots, 0\}$ von Null verschieden ist, existieren eindeutig bestimmte $c_l \in \mathbb{R}$, $l=-2k, \dots, 0$, mit

$$\sum_{j=0}^{2k} a_j \cdot x^j = \sum_{l=-2k}^0 c_l \cdot (x - x_l)^{2k}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Somit können wir für $x \in I$ die Funktion s schreiben als

$$s(x) = \sum_{l=-2k}^n c_l \cdot (x - x_l)^{2k}_+.$$

Da die eindeutige Lösbarkeit des vorliegenden Interpolationsproblems mit der des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=-2k}^n c_i \cdot (x_{l+1/2} - x_i)_+^{2k} = f(x_{l+1/2}) \quad , \quad l=0, \dots, n \quad ,$$

$$\frac{(2k)!}{(2k-j)!} \cdot \sum_{i=-2k}^n c_i \cdot (x_l - x_i)_+^{2k-j} = f^{(j)}(x_l) \quad ,$$

$$l=0, n+1 \text{ und } j=0, \dots, k-1 \quad ,$$

äquivalent ist, müssen wir zeigen, daß dessen Koeffizientenmatrix M regulär ist. Dazu führen wir nun die entsprechend ihrer Vielfachheiten numerierte Menge $\{t_l \mid l=1, \dots, n+1+2k\}$ der Interpolationsknoten ein, d.h. es gilt

$$t_1 = \dots = t_k = x_0, \quad t_{n+1+k+1} = \dots = t_{n+1+2k} = x_{n+1} \quad \text{und}$$

$$t_{i+k+1} = x_{i+1/2} \quad , \quad i=0, \dots, n.$$

Gegenüber den gemäß $\xi_i := x_{i-2k-1}$, $i=1, \dots, n+1+2k$,

umbenannten Punkten von $\# \{x_{n+1}\}$ sind die Interpolationsstützstellen folgendermaßen angeordnet:

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{2k} < \xi_{2k+1} = t_1 = \dots = t_k < t_{k+1} < \xi_{2k+2} < t_{k+2} < \xi_{2k+3} < t_{k+3} < \dots < t_1 < \xi_{1+k+1} < t_{1+1} < \dots < t_{n+k} < \xi_{n+1+2k} < t_{n+1+k} < t_{n+1+k+1} = \dots = t_{n+1+2k} \quad \text{mit } l \in \{k+1, \dots, n+k\}.$$

Daraus folgt $\det M > 0$ nach KARLIN-ZIEGLER [12], wenn wir zeigen können, daß die Ungleichungen

$$\xi_1 < t_1 \quad , \quad l=1, \dots, n+1+2k \quad , \quad \text{und}$$

$$t_{l-(2k+1)} < \xi_l \quad , \quad l=2k+2, \dots, n+1+2k \quad ,$$

erfüllt sind. Man überzeugt sich sofort, daß das in der Tat der Fall ist, womit die Behauptung bewiesen ist. $\diamond$

Nach Vorgabe einer Partition π haben wir oben die Interpolationsknoten $\pi' := \{x_{i+1/2} \mid i=0, \dots, n\}$ definiert. Es erhebt sich nun die Frage, ob man bei vorgegebenem π' eine Partition π derart bestimmen kann, daß zwischen beiden Punktmengen die Relationen $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$

erfüllt sind. Wie das folgende Gegenbeispiel zeigt, ist das jedoch nicht immer möglich.

Wir wählen $n=3$ und $\pi' := \{x_{i+1/2} \mid i=0, \dots, 3\} = \{0, 1, 10, 11\}$.

Für die Abstände $h_i := x_{i+1} - x_i$, $i=0, \dots, 3$, der Punkte der gesuchten Partition π muß jeweils $h_i \in (0, 2)$ gelten, da

$x_1 = x_{1+1/2} - h_1/2$ und $x_{i+1} = x_{i+1/2} + h_i/2$, $i=0, \dots, 3$, sowie $x_0 < x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{7/2} < x_4$ gefordert wird. Der Abstand zweier Punkte aus π' berechnet sich gemäß

$$x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = (x_{i+1/2} - x_i) + (x_i - x_{i-1/2}) = \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1}), \quad i=1, 2, 3.$$

Für $i=2$ erhalten wir insbesondere

$$x_{5/2} - x_{3/2} = 10 - 1 = 9 = \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \in \frac{1}{2}(0, 4) = (0, 2)$$

und damit einen Widerspruch.

Besitzt das gestellte Problem jedoch Lösungen, so können wir sie bestimmen nach

Lemma 4.2: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi' := \{x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{n+1/2}\} \subset \mathbb{R}$.

Genau dann existiert ein $\pi := \{x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}\}$ mit

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad i=0, \dots, n, \text{ und}$$

$$x_0 < x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{n+1/2} < x_{n+1}, \text{ falls es ein } h \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ gibt mit}$$

$$A \cdot h = 2(x_{(i+1)+1/2} - x_{i+1/2})_{0 \leq i \leq n-1}^T \quad \text{und} \quad h \in \bigtimes_{i=0}^n (0, b_i).$$

Dabei seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, n+1) \quad \text{und}$$

$$b_0 = 2(x_{3/2} - x_{1/2}), \quad b_i = 2 \cdot \min\{(x_{i+1/2} - x_{i-1/2}), (x_{i+3/2} - x_{i+1/2})\},$$

$$i=1, \dots, n-1, \text{ und } b_n = 2(x_{n+1/2} - x_{n-1/2}).$$

Existiert eine Lösung $h=(h_0, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, so gilt

$$x_i = x_{i+1/2} - h_i/2 \text{ und } x_{i+1} = x_{i+1/2} + h_i/2, \quad i=0, \dots, n.$$

Beweis: Durch die Bedingungen

$$x_{(i+1)+1/2} - x_{i+1/2} = (x_{(i+1)+1/2} - x_{i+1}) + (x_{i+1} - x_{i+1/2}) = \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_i), \quad i=0, \dots, n-1,$$

wird das unterbestimmte lineare Gleichungssystem

$$A \cdot h = 2(x_{(i+1)+1/2} - x_{i+1/2})_{0 \leq i \leq n-1}^T$$

definiert. Dieses System wird durch eine eindimensionale

lineare Mannigfaltigkeit gelöst, da n der Rang der

$n \times (n+1)$ -Matrix A und der um den Konstantenvektor erweiterten

Matrix ist. Sei $v := ((-1)^{n-i})_{0 \leq i \leq n}^T$, dann ist

$\{v \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$ der Lösungsraum des homogenen Systems. Denn

sei $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und a_i die i -te Zeile von A , so gilt

$$(a_i \cdot v) \cdot t = (-1)^{n-i} \cdot t + (-1)^{n-(i+1)} \cdot t = 0.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems ist der

Vektor w mit

$$w_i = \frac{2}{(-1)^i} \cdot \{ (-1)^{n-1} \cdot x_{n+1/2} - (-1)^i \cdot x_{i+1/2} + \\ + 2 \cdot \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{j-1} \cdot x_{j+1/2} \}, \quad i=0, \dots, n-1, \text{ und}$$

$w_n = 0$, denn

$$a_i \cdot w = \frac{2}{(-1)^i} \cdot \{ (-1)^{n-1} \cdot x_{n+1/2} - (-1)^i \cdot x_{i+1/2} + \\ + 2 \cdot \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{j-1} \cdot x_{j+1/2} \} + \\ + \frac{2}{(-1)^{i+1}} \cdot \{ (-1)^{n-1} \cdot x_{n+1/2} - (-1)^{i+1} \cdot x_{i+3/2} + \\ + 2 \cdot \sum_{j=i+2}^{n-1} (-1)^{j-1} \cdot x_{j+1/2} \},$$

also

$$\begin{aligned}
 a_i \cdot w &= -2(x_{i+1/2} + x_{i+3/2}) + \\
 &+ 4 \cdot \{x_{i+3/2} + \sum_{j=i+2}^{n-1} ((-1)^{j-i-1} + (-1)^{j-i-2}) \cdot x_{j+1/2}\} \\
 &= 2(x_{i+3/2} - x_{i+1/2}) \quad , \quad i=0, \dots, n-2 \quad , \quad \text{und}
 \end{aligned}$$

$$a_{n-1} \cdot w = 2(x_{n+1/2} - x_{n-1/2}) \quad .$$

Also ist $\{g(t) := v \cdot t + w \mid t \in \mathbb{R}\}$ die gesuchte Mannigfaltigkeit.

Auf Grund der Definition der Elemente von π und der erlaubten Intervalle für die Komponenten von h gilt die Relation

$$\begin{aligned}
 x_0 &< x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{n+1/2} < x_{n+1} \quad , \quad \text{falls} \\
 \{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \bigcap_{i=0}^n (0, b_i) &\neq \emptyset \quad . \quad \text{Schließlich folgt aus}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) = \frac{1}{2}(x_{i+1/2} - h_i/2 + x_{i+1/2} + h_i/2) = x_{i+1/2}$$

die Behauptung. $\diamond$

Die bisher bekannten Fehlerabschätzungen für die Approximation von Funktionen durch interpolierende Polynom-Splines beliebigen ungeraden Grades und durch allgemeine L-Splines bzgl. beliebiger Partitionen beruhen auf den folgenden Eigenschaften dieser Splines: der Orthogonalitätsrelation im Raum $L^2(I)$, der ersten Minimaleigenschaft und den beiden Integralrelationen. Erfüllen diese Splines geeignete Randbedingungen, so folgt die Gültigkeit der zweiten Integralrelation daraus, daß sich die Splines in jedem Partitionsteilintervall auf ein Element aus $\text{Ker } L^*L$ reduzieren. Durch die Theorie der Spline-Systeme (vgl. auch § 7) wurde der Nachweis der übrigen Eigenschaften auf den Beweis der Orthogonalitätsrelation zurückgeführt. Sei nun $k \geq 1$, X ein Unterraum von $C^{k-1}(I)$ und $P: X \rightarrow P(X)$ der in Satz 4.1

definierte lineare und idempotente Spline-Projektor vom Grade $2k$ bzgl. der Partition π . Gäbe es nun einen linearen Differentialoperator U der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so daß sich die Funktionen aus $P(X)$ in den Partitionsteilintervallen auf Elemente von $\text{Ker } U^*U$ reduzieren würden und daß

$$\text{Im } U \perp \text{Im } U(\text{Id}-P)$$

bzgl. $(\cdot, \cdot)_2$ gelten würde, d.h. daß $(X, P, U, L^2(I))$ ein Spline-System wäre, so wären alle oben genannten Eigenschaften erfüllt und wir könnten auch für die interpolierenden Splines geraden Grades nach Satz 4.1 in einfacher Weise Fehlerabschätzungen und Konvergenzaussagen gewinnen. Auf Grund des folgenden Satzes läßt sich leider kein solcher Operator finden und die Fehlerabschätzungen werden sich deshalb auf die die Interpolationssplines bestimmenden Gleichungssysteme stützen müssen.

Satz 4.3: Seien $k \geq 1$, I ein kompaktes reelles Intervall, X ein Unterraum von $C^{k-1}(I)$ und P der in Satz 4.1 definierte Spline-Projektor bzgl. $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, so existiert kein linearer Differentialoperator

$U = D^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot D^i$ mit $0 \leq m \leq 2k-1$ und $a_i \in C^m(I)$, $i=0, \dots, m-1$, derart, daß $(X, P, U, L^2(I))$ ein Spline-System ist und für alle $s \in P(X)$ gilt: $s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \text{Ker } U^*U$, $i=0, \dots, n$.

Beweis: Wir nehmen die Existenz eines solchen Operators U an. Wegen $a_i \in C^m(I)$, $i=0, \dots, m-1$, existiert der zu U formal adjungierte Operator

$$U^* = (-1)^m \cdot D^m + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \cdot D^i (a_i \cdot)$$

und damit auch

$L := U^*U = (-1)^m \cdot D^{2m} + \sum_{i=0}^{2m-1} b_i \cdot D^i$ mit $b_i \in C(I)$, $i=0, \dots, 2m-1$.

Sei $s \in P(X)$ und $i \in \{0, \dots, n\}$, so gibt es nach Satz 4.1 ein $p \in \Pi_{2k}$ mit $p = s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \text{Ker } L$, d.h. $\Pi_{2k} \subset \text{Ker } L$. Diese Inklusion liefert nähere Aussagen über die Gestalt von L .

Aus $L\pi_0 = b_0 \cdot \pi_0 = 0$ folgt $b_0 = 0$. Machen wir die Induktionsannahme $b_0 = \dots = b_i = 0$ für $0 \leq i < 2k$, so ergibt sich aus

$L\pi_{i+1} = (i+1)! \cdot b_{i+1} \cdot \pi_0 = 0$ durch Induktion die Darstellung

$$L = (-1)^m \cdot D^{2m} + \sum_{i=2k+1}^{2m-1} b_i \cdot D^i \quad \text{und } m > k.$$

Wir wählen nun den Unterraum X derart, daß die im folgenden auftretenden Ableitungen existieren und berechnen mit $a_m := 1$ für $f \in X$ und $Pf, s \in P(X)$ nach der Green-schen Formel das innere Produkt

$$(Us, U(f-Pf))_2 = \int_a^b (Us)(x) \cdot U(f-Pf)(x) dx =$$

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} (Us)(x) \cdot U(f-Pf)(x) dx =$$

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} (U^*Us)(x) \cdot (f-Pf)(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} (f-Pf)^{(m-j-1)}(x) \times \right.$$

$$\times \sum_{l=1}^j (-1)^l \cdot [a_{m-j+l}(x) \cdot (Us)(x)]^{(1)} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m-1} (f-Pf)^{(m-j-1)}(x) \cdot \sum_{l=0}^j (-1)^l \cdot [a_{m-j+l}(x) \cdot (Us)(x)]^{(1)} \right\} \Big|_a^b +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=2k-m}^{m-1} (f-Pf)^{(m-j-1)}(x_i) \times \right.$$

$$\times \sum_{l=2k-m}^j (-1)^l \cdot [a_{m-j+l}(x_i) \cdot (Us)(x_i - 0) -$$

$$- a_{m-j+l}(x_i) \cdot (Us)(x_i + 0)]^{(1)} \Big\} ,$$

wegen $s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \text{Ker } U^*U$, $i=0, \dots, n$, und $s \in C^{2k-1}(I)$.

Auf Grund von

$$D^1(a_{m-j+1} \cdot \sum_{r=0}^m a_r \cdot D^r s) = D^1(\sum_{r=0}^m (a_{m-j+1} \cdot a_r) \cdot D^r s) = \\ \sum_{r=0}^m D^1[(a_{m-j+1} \cdot a_r) \cdot D^r s] = \sum_{r=0}^m \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} \cdot D^p(a_{m-j+1} \cdot a_r) \cdot D^{1-p+r} s$$

erhalten wir

$$[a_{m-j+1}(x_i) \cdot ((Us)(x_i-0) - (Us)(x_i+0))]^{(1)} = \\ \sum_{r=0}^m \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} \cdot D^p(a_{m-j+1} \cdot a_r)(x_i) \cdot (-\Delta_i) \cdot \delta_{2k, 1-p+r} \\ \text{mit } \Delta_i := s^{(2k)}(x_i+0) - s^{(2k)}(x_i-0). \text{ Für } j=1=2k-m \text{ gilt nun} \\ \sum_{r=0}^m \sum_{p=0}^{2k-m} \binom{2k-m}{p} \cdot a_r^{(p)}(x_i) \cdot (-\Delta_i) \cdot \delta_{2k, 2k-m-p+r} = a_m(x_i) \cdot (-\Delta_i) = -\Delta_i, \\ \text{denn } r-m-p=0 \text{ genau dann, wenn } m=r-p, \text{ d.h. wegen} \\ p \in \{0, \dots, 2k-m\}, \text{ daß } r \in \{m, \dots, 2k\} \text{ sein muß.}$$

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ und $s \in P(X)$ mit $\Delta_i \neq 0$, z.B. die durch $s(x) = (x - x_i)_+^{2k}$, $x \in I$, definierte Funktion. Dann gibt es nach Satz 6.3 ein $F \in C^\infty(I)$, für das gilt:

$$F(x_{j+1/2}) = s(x_{j+1/2}), \quad j=0, \dots, n, \\ F^{(1)}(x_j) = s^{(1)}(x_j), \quad j=0, n+1 \text{ und } l=0, \dots, \max(m-1, 2k-2), \\ F^{(m-1-l)}(x_j) = s^{(m-1-l)}(x_j), \quad l=2k-m+\delta_{ij}, \dots, m-1, \quad j=1, \dots, n, \\ \text{sowie} \\ F^{(2m-2k-1)}(x_i) = s^{(2m-2k-1)}(x_i) - 1.$$

Auf Grund der Interpolationsbedingungen gilt $PF=s$ und $(Us, U(F-PF))_2 = (-1)^{2k-m+1} \cdot \Delta_i \neq 0$.

Also kann $(X, P, U, L^2(I))$ kein Spline-System sein. $\diamond$

Bemerkung 4.4: Seien $k \geq 1$, $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition von $I = [a, b]$, $L = D^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot D^i$ mit $a_i \in C^k(I)$, $i=0, \dots, k-1$, $P: W_2^{(k)}(I) \rightarrow W_2^{(k)}(I)$ ein Spline-Projektor bzgl. π , d.h. es gelte $(f-Pf)^{(j)}(x_i) = 0$, $j \in J_i \subset \{0, \dots, k-1\}$ und $i=0, \dots, n+1$, sowie $f \in W_2^{(k)}(I)$. Dann ist $(W_2^{(k)}(I), P, L, L^2(I))$ ein Spline-System, wenn die Orthogonalitätsrelation

Im $LP \perp$ Im $L(Id-P)$ gilt. Verstehen wir L^*Ls im verallgemeinerten, d.h. distributionellen, Sinne, so können wir entsprechend der Formel im obigen Beweis die Orthogonalitätsrelation für $f \in W_2^{(k)}(I)$ und $s \in P(W_2^{(k)}(I))$ schreiben als $(Ls, L(f-Pf))_2 = (L^*Ls, f-Pf)_2 + RT$.

Es gibt i.a. verschiedene Möglichkeiten, die von L, f, Pf, s, a und b abhängigen Randterme RT zum Verschwinden zu bringen. Da in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, \dots, n$, $s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \text{Ker } L^*L$ ist, gilt $(L^*Ls)(x) = 0$ für $x \in I \setminus \pi$, während bei der Bildung von L^*Ls an den Partitionspunkten δ -Distributionen bzw. deren Ableitungen auftreten. Damit also die Orthogonalitätsrelation gilt, müssen $f-Pf$ bzw. Ableitungen dieser Funktionen an den Partitionspunkten verschwinden. So ergeben sich die üblichen Interpolationsbedingungen ganz kanonisch aus der Forderung nach Gültigkeit der Orthogonalitätsrelation. $\diamond$

Nach dem negativen Resultat von Satz 4.3 stellt sich nun die Frage, ob es vielleicht andere Klassen von Splines geraden Grades gibt, für die sich dennoch Minimaleigenschaften zeigen lassen, die denen der Splines ungeraden Grades analog sind. Eine solche Klasse mit einem anderen Interpolationsprojektor als dem im Satz 4.1 definierten werden wir im Paragraphen 7 kennenlernen.

Zusammen mit bereits bekannten Abschätzungen für die Approximationsfehler bei der Spline-Interpolation, welche im nächsten Paragraphen benötigt werden, formulieren wir nun zwei Ergebnisse für Splines geraden Grades, die wir

im folgenden beweisen werden.

Satz 4.5: Gegeben seien die Partition $\pi: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}=b$, $n \in \mathbb{N}$, von $I=[a,b]$, $m \geq 1$, $0 \leq k < 2m$, $2 \leq p \leq \infty$ und $f \in W_p^{(k+1)}(I)$. Sei s die eindeutig bestimmte, Hermite-Randbedingungen erfüllende bzw. periodische für $(b-a)$ -periodisches f , Spline-Interpolierende $(2m-1)$ -ten Grades von f bzgl. π , d.h.

$$(f-s)(x_i) = 0, \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und}$$

$$D^j(f-s)(x_i) = 0, \quad j=0, \dots, \min(k, m-1), \text{ und}$$

$$D^j s(x_i) = 0, \quad j=k+1, \dots, m-1, \quad i=0, n+1, \text{ bzw.}$$

$$D^j s(x_0) = D^j s(x_{n+1}), \quad j=0, \dots, 2m-2.$$

Dann gelten folgende Fehlerabschätzungen.

- (i) (SWARTZ-VARGA [21]): Ist $\|\pi\| \leq \beta \cdot \Delta$, so existieren Konstanten K_1 , die nur von β, m, k, p, q, j und $(b-a)$ abhängen, derart daß

$$\begin{aligned} K_1 \cdot \|\pi\|^{k+1-j+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \cdot \|D^{k+1}f\|_{L^p(I)} &\geq \\ &\geq \begin{cases} \|D^j(f-s)\|_{L^q(I)}, & j=0, \dots, k \\ \|D^j s\|_{L^q(I)}, & j=k+1, \dots, 2m-1 \end{cases}, \quad p \leq q \leq \infty. \end{aligned}$$

- (ii) (SWARTZ-VARGA [21]): Ist π uniform, so existieren Konstanten K_2 , die nur von m, k, p, q, j und $(b-a)$ abhängen, derart daß

$$\begin{aligned} K_2 \cdot \|\pi\|^{k+1-j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \cdot \|D^{k+1}f\|_{L^p(I)} &\geq \\ &\geq \begin{cases} \|D^j(f-s)\|_{L^q(I)}, & j=0, \dots, k \\ \|D^j s\|_{L^q(I)}, & j=k+1, \dots, 2m-1 \end{cases}, \quad p \leq q \leq \infty. \end{aligned}$$

- (iii) (CARLSON-HALL [6]): Ist $\|\pi\| \leq \beta \cdot \Delta$, $m=1, 2$, $f \in C^{k+1}(I)$ und erfüllt s für $m=2$ Hermite-Randbedingungen, dann gilt mit nur von β, m, k und j abhängigen Konstanten K_3 :

$$K_3 \cdot \| \pi \|^{k+1-j} \cdot \| D^{k+1} f \|_{\infty, I} \geq \\ \geq \| D^j (f-s) \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, \min(k+1, 2m-1).$$

Seien nun $n > m \geq 0$, $\pi' := \{x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \mid i=0, \dots, n\}$ und $f \in C^{2m+1}(I)$, sowie s eine unten jeweils näher spezifizierte Spline-Interpolierende $2m$ -ten Grades von f bzgl. π und π' , d.h.

$$(f-s)(x_{i+1/2}) = 0, \quad i=0, \dots, n.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (iv) (Satz 4.1 und 6.10): Ist $\| \pi \| \leq \beta \cdot \Delta$, $m=0,1$, und s für $m=1$ der nach Satz 4.1 eindeutig bestimmte quadratische Spline, dann gilt mit nur von β, m und j abhängigen Konstanten K_4 :

$$K_4 \cdot \| \pi \|^{2m+1-j} \cdot \| D^{2m+1} f \|_{\infty, I} \geq \\ \geq \| D^j (f-s) \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2m.$$

- (v) (Satz 4.6): Ist π uniform, $n \geq 2k-1 \geq 1$ und s der die Hermite-Birkhoff-Randbedingungen $D^{2j}(f-s)(x_i) = 0$, $j=0, \dots, m-1$ und $i=0, n+1$, erfüllende eindeutig bestimmte Spline, so existieren von f und π unabhängige Konstanten K_5 mit

$$K_5 \cdot \| \pi \|^{2m+1-j} \cdot \| D^{2m+1} f \|_{\infty, I} \geq \\ \geq \| D^j (f-s) \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2m.$$

- (vi) (SUBBOTIN [19]): Ist π uniform und s der eindeutig bestimmte periodische Spline, d.h.

$$D^j s(x_0) = D^j s(x_{n+1}), \quad j=0, \dots, 2m-1,$$

dann gibt es von f und π unabhängige Konstanten K_6 mit

$$K_6 \cdot \| \pi \|^{2m+1-j} \cdot \| D^{2m+1} f \|_{\infty, I} \geq \\ \geq \| D^j (f-s) \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2m.$$

Die Abschätzung der Approximationsfehler von interpolierenden Mittelpunkt-Splines beliebigen geraden Grades ist algebraisch derart verwickelt, daß wir uns nun auf äquidistante Partitionen $\pi = \{x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n+1} \mid i=0, \dots, n+1\}$ von $I=[a, b]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\|\pi\| = \Delta = \frac{b-a}{n+1}$ beschränken werden. Unter Verwendung etwas anderer Randbedingungen als im Satz 4.1 erhalten wir den

Satz 4.6: Seien $n > k \geq 1$, $f \in C^{2k+1}(I)$ und π die uniforme Partition von I mit $\|\pi\| = \frac{b-a}{n+1}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Spline-Funktion $s \in \Pi_{2k}(\pi) \cap C^{2k-1}(\mathbb{R})$ bzgl. f und π , die die Interpolationsbedingungen

$$s(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}), \quad i=0, \dots, n,$$

und die Randbedingungen

$$s^{(2j)}(x_i) = f^{(2j)}(x_i), \quad i=0, n+1 \text{ und } j=0, \dots, k-1,$$

erfüllt. Mit einer von f und π unabhängigen Konstanten B gilt für s und $n \geq 2k-1$:

$$\|D^j(f-s)\|_{\infty, I} \leq B \cdot \|\pi\|^{2k+1-j} \cdot \|D^{2k+1}f\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2k.$$

Beweis:

(i) Existenz und Eindeutigkeit:

Stellen wir aus den obigen Interpolations- und Randbedingungen das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter in der allgemeinen Darstellung von s aus Satz 4.1 auf, so ist dieses genau dann eindeutig lösbar, wenn das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt. Darum betrachten wir einen Spline $s \in C^{2k-1}[0, 1] \cap \Pi_{2k}\{\frac{i}{n+1} \mid i=0, \dots, n+1\}$ mit $s(\frac{i+1/2}{n+1}) = 0$, $i=0, \dots, n$ und $s^{(2j)}(0) = s^{(2j)}(1) = 0$ für $j=0, \dots, k-1$. Durch ungerade Erweiterung von s auf $[-1, 0]$

definieren wir die Funktion $\hat{s}$:

$$\hat{s}(x) := \begin{cases} s(x) & , x \in [0,1] \\ -s(-x) & , x \in [-1,0] \end{cases} . \text{ Es gilt } \frac{d^j}{dx^j} \hat{s}(x) = -(-1)^j \cdot s^{(j)}(-x)$$

für $x \in [-1,0]$ und daher auf Grund der Randbedingungen:

$$\hat{s} \in C^{2k-1}[-1,1] \text{ und } \hat{s}^{(j)}(-1) = \hat{s}^{(j)}(1), j=0, \dots, 2k-1, \text{ d.h. } \hat{s}$$

läßt sich 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Nach Satz 4.5(vi)

ist die Nullfunktion der eindeutig bestimmte interpolierende

2-periodische Spline $2k$ -ten Grades bzgl. homogener Daten

und der Partition $\{\frac{i}{n+1} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{R}$. Da die Einschränkung

der Nullfunktion auf $[0,1]$ alle Bedingungen erfüllt, die

Randbedingungen homogen sind und die affine, bijektive

Abbildung von $[0,1]$ nach I Polynom-Splines in solche gleichen

Grades überführt, ist die Behauptung bewiesen.

(ii) Fehlerabschätzung:

Um diesen Beweisteil so kurz wie möglich zu halten, werden

wir einen sogenannten Stabilitätssatz anwenden. Dafür ist

zu zeigen, daß die Funktionswertdifferenzen zwischen f' und

dem Spline ungeraden Grades s' an den Punkten aus π hin-

reichend klein sind. Wir führen den Beweis in sechs Schritten.

- (a) Mit Hilfe der Interpolationsbedingungen wird ein Gleichungssystem für diese Differenzen aufgestellt.
- (b) Die Norm der rechten Seite dieses Systems wird abgeschätzt.
- (c) Das System wird durch Funktionsfortsetzungen erweitert. Die dabei neu hinzukommenden Konstanten auf der rechten Seite treten bereits als Elemente des alten Konstantenvektors auf. Also wird die Norm des Vektors

auf der rechten Seite auch in mittleren Komponenten angenommen.

- (d) Damit ist nach Faktorisierung der Koeffizientenmatrix die Abschätzung der unbekannten Funktionswertdifferenzen möglich.
- (e) Es folgt die Anwendung des Stabilitätssatzes und
- (f) durch Integration die eigentliche Fehlerabschätzung.

Wir beginnen nun mit

(a) der Aufstellung des Gleichungssystems:

Wir definieren die Faltung zweier unendlicher Folgen

$(a_v)_{v \in \mathbb{Z}}, (b_v)_{v \in \mathbb{Z}}$ durch $(a_v) * (b_v) = (c_v)$ mit $c_v = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_\mu \cdot b_{v-\mu}$, $v \in \mathbb{Z}$, sofern der Grenzwert dieser Reihe existiert. Die

Folgenfaltung ist kommutativ und assoziativ und es gilt

$$(1) \quad (a_v) * (b_v) = (a_{v-\mu}) * (b_{v+\mu}), \quad \mu, v \in \mathbb{Z}.$$

Sei $m \geq 1$ und $\sigma \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ eine Spline-Funktion m -ten Grades mit den Knoten $y_v = v$, $v=1, \dots, l$, $l \geq 1$. Der B-Spline Q m -ten

Grades mit $\text{supp } Q = [0, m+1]$ sei definiert durch

$$Q(x) = Q_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \cdot \binom{m+1}{i} \cdot (x-i)_+^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir falten die Folgen $(Q'(v))_{v \in \mathbb{Z}}$ und $(Q(v+\frac{1}{2}))_{v \in \mathbb{Z}}$ und erhalten nach obigen Regeln

$$(Q'(v)) * (Q(v+\frac{1}{2}-\mu)) = (Q'(v-\mu)) * (Q(v+\frac{1}{2})) = (Q(v+\frac{1}{2})) * (Q'(v-\mu)).$$

Auf Grund des Darstellungssatzes von CURRY und SCHOENBERG [17] können wir σ schreiben als

$$\sigma(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} c_v \cdot Q(x-v) \quad \text{mit } x, c_v \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt also $\sigma(\mu+\frac{1}{2}) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} c_v \cdot Q(\mu+\frac{1}{2}-v)$ und

$$\sigma'(\mu) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} c_v \cdot Q'(\mu-v), \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad \text{d.h.}$$

$$(\sigma(\mu + \frac{1}{2})) = (c_\mu) * (Q(\mu + \frac{1}{2})) \quad \text{und} \quad (\sigma'(\mu)) = (c_\mu) * (Q'(\mu)).$$

Daraus folgt mit der Kommutativität und der Assoziativität der Faltung:

$$\begin{aligned} (\sigma(\mu + \frac{1}{2})) * (Q'(\mu)) &= ((c_\mu) * (Q(\mu + \frac{1}{2}))) * (Q'(\mu)) = \\ &= (Q(\mu + \frac{1}{2})) * ((c_\mu) * (Q'(\mu))) = (Q(\mu + \frac{1}{2})) * (\sigma'(\mu)) = (\sigma'(\mu)) * (Q(\mu + \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

Ausführen der Faltung für $\mu=m$ liefert wegen $\text{supp } Q_{m+1} =$

$[0, m+1]$:

$$\begin{aligned} \{ (\sigma(\mu + \frac{1}{2})) * (Q'(\mu)) \}_{\mu=m} &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \sigma(v + \frac{1}{2}) \cdot Q'(m-v) = \\ \sum_{v=0}^{m-1} \sigma(v + \frac{1}{2}) \cdot Q'(m-v) &= \{ (\sigma'(\mu)) * (Q(\mu + \frac{1}{2})) \}_{\mu=m} = \\ \sum_{v \in \mathbb{Z}} \sigma'(v) \cdot Q(m + \frac{1}{2} - v) &= \sum_{v=0}^m \sigma'(v) \cdot Q(m + \frac{1}{2} - v). \end{aligned}$$

Sei nun $h > 0$ und $\sigma(x) =: \tau(h \cdot x + c)$, $c, x \in \mathbb{R}$, so ergibt obige Relation:

$$(2) \quad \sum_{v=0}^{m-1} \tau(h \cdot (v + \frac{1}{2}) + c) \cdot Q'(m-v) = h \cdot \sum_{v=0}^m \tau'(h \cdot v + c) \cdot Q(m + \frac{1}{2} - v).$$

Wir setzen $m := 2k$, $l = n$ und $h := \frac{1}{n+1}$. Zu $g \in C^{2k+1}[0, 1]$ bestimmen

wir nach (i) die Spline-Funktion $t \in \Pi_{2k}(\mathbb{R}) \cap C^{2k-1}(\mathbb{R})$ mit

$\mathbb{R} := \{i \cdot h \mid i = 0, \dots, n+1\}$, d.h. es gilt

$t(h \cdot (i + \frac{1}{2})) = g(h \cdot (i + \frac{1}{2}))$, $i = 0, \dots, n$. Damit folgt aus der

Gleichung (2) für alle $i \in \{0, \dots, n+1-2k\}$:

$$(3) \quad \sum_{v=0}^{2k-1} g(h \cdot (i+v + \frac{1}{2})) \cdot Q'(2k-v) = h \cdot \sum_{v=0}^{2k} t'(h \cdot (i+v)) \cdot Q(2k + \frac{1}{2} - v).$$

Subtrahiert man $h \cdot \sum_{v=0}^{2k} g'(h \cdot (i+v)) \cdot Q(2k + \frac{1}{2} - v)$ von (3):

$$(4) \quad \sum_{v=0}^{2k-1} g(h \cdot (i+v + \frac{1}{2})) \cdot Q'(2k-v) - h \cdot \sum_{v=0}^{2k} g'(h \cdot (i+v)) \cdot Q(2k + \frac{1}{2} - v) = \\ h \cdot \sum_{v=0}^{2k} Q(2k + \frac{1}{2} - v) \cdot \{t'(h \cdot (i+v)) - g'(h \cdot (i+v))\},$$

so definiert die linke Seite dieser Gleichung ein lineares Funktional F_i auf $C^1[i \cdot h, (i+2k) \cdot h]$.

(b) Normabschätzung des Konstantenvektors:

Da die F_i für alle $g \in \Pi_{2k} \subset \Pi_{2k}(\mathbb{R}) \cap C^{2k-1}(\mathbb{R})$ wegen der Eindeutigkeit der Spline-Interpolation verschwinden, ist das Kern-

$F_i(g_1) = F_i(g)$, $i=0, \dots, n+1-2k$; für die entsprechend definierten $|F_i(g_1)|$, $i=-n-1, \dots, -1$, gilt unverändert die oben

hergeleitete Abschätzung und aus der Symmetrie folgt

$$|(g'_1 - t'_1)(i \cdot h)| = |(g'_1 - t'_1)(-i \cdot h)|, \quad i=0, \dots, n+1, \text{ sowie}$$

$$|F_{i-k}(g_1)| = |F_{-i-k}(g_1)|, \quad i=0, \dots, n+1-k.$$

Mit dem Taylorpolynom $p_1 \in \Pi_{2k}$ bzgl. g_1 um 1 definieren wir

$g_2 := g_1 - p_1$ und $t_2 := t_1 - p_1$ und erweitern diese Funktionen

ungerade auf $[1, 3]$:

$$q_2(x) = \begin{cases} q_1(x) - p_1(x) & , \quad x \in [-1, 1] \\ -(q_1(2-x) - p_1(2-x)) & , \quad x \in [1, 3] \end{cases} \quad \text{für } q \in \{g, t\}.$$

Dann gilt für g_2 und t_2 sinngemäß das über g_1 und t_1

Gesagte, insbesondere

$$|(g'_2 - t'_2)(i \cdot h)| = |(g'_2 - t'_2)((2n+2-i) \cdot h)|, \quad i=-n-1, \dots, n+1, \text{ und}$$

$$|F_{i-k}(g_2)| = |F_{2n+2-i-k}(g_2)|, \quad i=k-n-1, \dots, n+1.$$

(d) Faktorisierung der Koeffizientenmatrix:

Wir betrachten nun das aus den Gleichungen (4) gebildete

lineare Gleichungssystem

$$\sum_{v=0}^{2k} Q(2k + \frac{1}{2} - v) \cdot (t'_2(h \cdot (i+v)) - g'_2(h \cdot (i+v))) = \frac{1}{h} \cdot F_i(g_2),$$

$$i = -n-1, \dots, 3n+3-2k,$$

das wir in Matrizenform schreiben als

$$M \cdot (T' - G') = \{h \cdot Q(\frac{1}{2})\}^{-1} \cdot F \quad \text{mit}$$

$$T' := (t'_2(i \cdot h); \quad i = -n-1, \dots, 3n+3)^T,$$

$$G' := (g'_2(i \cdot h); \quad i = -n-1, \dots, 3n+3)^T,$$

$$F := (F_i(g_2); \quad i = -n-1, \dots, 3n+3-2k)^T$$

und dem endlichen $(4n+5-2k) \times (4n+5)$ Segment M der zweifach unendlichen Toeplitz-Matrix U mit $2k+1$ nichtverschwindenden Diagonalen, die von der Zeile

$c: (Q(v+\frac{1}{2})/Q(\frac{1}{2}); v=0, \dots, 2k)$ erzeugt wird (vgl. SWARTZ [20]).

Wegen der Achsensymmetrie des B-Splines Q gilt

$$Q(2k+\frac{1}{2}-i)=Q((k+\frac{1}{2})+(k-i))=Q((k+\frac{1}{2})-(k-i))=Q(i+\frac{1}{2}),$$

d.h. die Matrix U und die Koeffizienten des charakteristischen

Polynoms $p(x) := \sum_{i=0}^{2k} Q(i+\frac{1}{2}) \cdot x^i$ sind symmetrisch, woraus sich

$p(x) = x^{2k} \cdot p(\frac{1}{x})$ ergibt. Nach SCHOENBERG [17] hat p nur ein-

fache negative Nullstellen. Sei z eine solche Nullstelle

von p , so folgt $p(z)=0=z^{2k} \cdot p(\frac{1}{z})$. Wegen $z^{2k} \neq 0$ ist auch $\frac{1}{z}$

Nullstelle von p . Weiterhin gilt $p'(x)=2k \cdot x^{2k-1} \cdot p(\frac{1}{x}) -$

$-x^{2k-2} \cdot p'(\frac{1}{x})$, woraus $p'(-1)=-p'(-1)$ folgt, wenn wir

annehmen, daß -1 eine Nullstelle von p sei. Im Widerspruch

zu SCHOENBERG [17] wäre -1 somit eine doppelte Nullstelle.

Seien also $-z_1, \dots, -z_k$ die k Nullstellen von p im Intervall

$(-1, 0)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt also

$$p(x) = Q(\frac{1}{2}) \cdot \prod_{i=1}^k (x+z_i) \cdot (x+\frac{1}{z_i}) = Q(\frac{1}{2}) \cdot \prod_{i=1}^k (x^2+r_i x+1)$$

mit $r_i := z_i + 1/z_i > 2$, $i=1, \dots, k$. Damit ist

$$\sum_{i=0}^{2k} c_i \cdot x^{k-i} = (Q(\frac{1}{2}))^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{2k} Q(i+\frac{1}{2}) \cdot x^{k-i} = \prod_{i=1}^k (x+r_i+\frac{1}{x})$$

mit $r_i > 2$, $i=1, \dots, k$, gezeigt. Äquivalent damit ist nach

SWARTZ [20], daß sich U faktorisieren läßt gemäß

$U = \prod_{i=1}^k D_i$, wobei die zweifach unendlichen Toeplitz-Matrizen D_i

von den Zeilen $(1, r_i, 1)$, $i=1, \dots, k$, erzeugt werden. Daraus

folgt $M = \prod_{i=1}^k N_i$ mit den $(4n+3-2k+2i) \times (4n+5-2k+2i)$ Segmenten

$$N_i := \begin{pmatrix} 1 & r_i & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & r_i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{von } D_i, \quad i=1, \dots, k.$$

Auf Grund der Definition von g_2 gilt

$$\max_{i=-n-1, \dots, 3n+3-2k} |F_i(g_2)| = \max_{i=-k, \dots, n+1-k} |F_i(g_2)|,$$

woraus für $i=1, \dots, k$ die Existenz eines Index $m(i)$,

$-n-1 < m(i) < 3n+1-2(k-i)$, folgt mit

$$\left| \left(\prod_{j=i}^k N_j \right) \cdot (T' - G')_{m(i)} \right| = \left| \left(\prod_{j=i}^k N_j \right) \cdot (T' - G') \right|_{\infty}.$$

Daraus folgt nach SWARTZ [20]:

$$(h \cdot Q(\frac{1}{2}))^{-1} \cdot \|F\|_{\infty} \geq \prod_{i=1}^k (r_i - 2) \cdot \|T' - G'\|_{\infty}, \text{ d.h. insbesondere}$$

$$\max_{i=0, \dots, n+1} |g'(x_i) - t'(x_i)| \leq$$

$$\leq \{h \cdot Q(\frac{1}{2}) \cdot \prod_{i=1}^k (r_i - 2)\}^{-1} \cdot M_1 \cdot h^{2k+1} \cdot \|g^{(2k+1)}\|_{\infty}.$$

(e) Anwendung des Stabilitätssatzes:

Wegen $(g' - t')^{(2j+1)}(x_i) = 0$, $j=0, \dots, k-2$ und $i=0, n+1$, sind mit

$$F_i(g', \#) := \left\| g'^{(2k)} \right\|_{\infty}, \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und}$$

$K := M_1 \cdot \{Q(\frac{1}{2}) \cdot \prod_{i=1}^k (r_i - 2)\}^{-1}$ die Voraussetzungen des folgenden Satzes erfüllt.

Satz 4.7 (SWARTZ-VARGA [21]): Seien $n \geq k \geq 1$, $f \in C^{2k}(I)$ und π

die uniforme Partition von I mit $\|\pi\| = \frac{b-a}{n+1}$. Dann existiert

genau ein $s \in \Pi_{2k-1}\{\pi\} \cap C^{2k-2}(\mathbb{R})$ mit

$$s(x_i) = \alpha_i, \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und } s^{(2j+1)}(x_i) = \beta_{ij}, \quad i=0, n+1,$$

$$j=0, \dots, k-2, \text{ für } \alpha_i, \beta_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Existieren nun Funktionen $F_i(f, \pi)$ mit $F_0 = F_{n+1}$ und eine

von f und π unabhängige Konstante K , derart daß

$$|f(x_i) - \alpha_i| \leq K \cdot \|\pi\|^{2k} \cdot F_i(f, \pi), \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und}$$

$$|f^{(2j+1)}(x_i) - \beta_{ij}| \leq K \cdot \|\pi\|^{2k-2j-1} \cdot F_i(f, \pi),$$

$$i=0, n+1, \quad j=0, \dots, k-2,$$

so gibt es eine von f und π unabhängige Konstante C und es gilt:

$$\| D^j (f-s) \|_{\infty, I} \leq C \cdot \| \pi \|^{2k-j} \cdot \{ \| D^{2k} f \|_{\infty, I} + \max_{\substack{i=0, \dots, n+1 \\ j=0, \dots, 2k-1}} F_i(f, \pi) \},$$

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.6:

Damit gilt also:

$$\| D^j (g'-t') \|_{\infty, I} \leq 2C \cdot h^{2k-j} \cdot \| D^{2k} g' \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2k-1.$$

(f) Fehlerabschätzung für die 0-te Ableitung:

Sei nun $x \in [0, 1]$, so existiert ein $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $x \in [i \cdot h, (i+1) \cdot h]$. Weil $(g-t)((i+\frac{1}{2}) \cdot h) = 0$ ist, erhalten wir die Behauptung für $\#$ aus

$$\begin{aligned} |(g-t)(x)| &= \left| \int_{(i+\frac{1}{2}) \cdot h}^x (g'-t')(y) dy \right| \leq \\ &\leq |x - (i+\frac{1}{2}) \cdot h| \cdot \| g'-t' \|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2C \cdot h^{2k} \cdot \| D^{2k+1} g \|_{\infty, I}. \end{aligned}$$

Durch die affine und bijektive Variablentransformation von $[a, b]$ nach $[0, 1]$ erhalten wir wegen $\| \pi \| = (b-a) \cdot h$ und mit $B := 2C$ das Resultat auch im allgemeinen Fall. $\diamond$

§ 5 Eigenschaften interpolierender C^∞ -Spline-Funktionen

Mit Hilfe der im Kapitel I entwickelten Theorie und der Aussagen des Satzes 4.5 über interpolierende Splines geraden und ungeraden Grades sind wir nun in der Lage, die Existenz, die Interpolations- und die Konvergenzeigenschaften regulärisierter Polynom-Splines zu untersuchen. Die Konvergenzaussagen werden sich aus expliziten Fehlerabschätzungen ergeben.

Zuerst erhalten wir den folgenden Interpolationssatz.

Hauptsatz 5.1: Seien $m \in \mathbb{N}$, $-1 \leq l \leq m$, $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition von $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $\Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$, $s \in \Pi_m(\pi) \cap C^1(\mathbb{R})$, ϕ ein gerader Kern aus $C_{0,2}^\infty\left[\frac{m}{2}+1\right](\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ und $\omega[\phi_h]$ der nach Satz 2.6 aus ϕ konstruierte Kern. Dann gelten

- (i) $\phi_h * s, \omega[\phi_h] * s \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $h > 0$,
- (ii) $(\phi_h * s)(x) = s(x)$ für alle $0 < h \leq \frac{\Delta}{2}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\text{dist}(x, \pi) \geq h$,
- (iii) $(\omega[\phi_h] * s)(x) = s(x)$ für alle $0 < h \leq \frac{\Delta}{4}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\text{dist}(x, \pi) \geq 2h$,
- (iv) $(\omega[\phi_h] * s)^{(j)}(x_i) = \begin{cases} s^{(j)}(x_i) & , 0 \leq j \leq 1 \\ \frac{1}{2}(s^{(j)}(x_i + 0) + s^{(j)}(x_i - 0)) & , j > 1 \end{cases}$
für alle $0 < h \leq \frac{\Delta}{2}$ und $i = 0, \dots, n+1$.

Beweis: Wegen $s \in L_{1,0}^1(\mathbb{R})$ gilt die Behauptung (i) nach Lemma 1.2(vii).

ad (ii): Sei $0 < h \leq \frac{\Delta}{2}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\text{dist}(x, \pi) \geq h$, dann folgt

wegen $\text{supp } \phi_h = [-h, h]$ und $\phi_h \in C_{0,2}^{\infty} \left[\frac{m}{2} \right] + 1 (\mathbb{R})$:

$$(\phi_h * s)(x) = \int_{\mathbb{R}} s(y) \cdot \phi_h(x-y) dy = \int_{x-h}^{x+h} s(y) \cdot \phi_h(x-y) dy =$$

$$= \int_{x-h}^{x+h} p(y) \cdot \phi_h(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} p(y) \cdot \phi_h(x-y) dy =$$

$$= (\phi_h * p)(x) = p(x) = s(x) \text{ mit } p \in \Pi_m,$$

da s auf jedem durch π induzierten Teilintervall von $\mathbb{R}$ mit einem Polynom p höchstens m -ten Grades identisch ist. Analog beweist man (iii) und mit Hilfe von Satz 2.6 auch (iv). $\diamond$

Bemerkung 5.2: Da bei der Wahl von h aus $(0, \frac{\Delta}{2}]$ höchstens ein Punkt aus π in $\{x + \text{supp } \phi_h\} \cap \pi$ liegt, hätte man Satz 5.1(ii) auch mit Hilfe von Satz 3.2(i) zeigen können. Die Formel (3.2)(i) gibt für alle $x \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\text{dist}(x, \pi)$ die Differenzen

$$D^j(\phi_h * s - s)(x), \quad j=0, \dots, l,$$

an, die für $\text{dist}(x, \pi) \geq h$ verschwinden. $\diamond$

Mit Hilfe von Satz 4.5 schätzen wir nun die Approximationsfehler bei der Interpolation durch regularisierte einfache Splines ab.

Satz 5.3: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $s \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ eine durch periodische bzw. Hermite-Birkhoff-Randbedingungen nach Satz 4.5 eindeutig bestimmte Spline-Interpolierende m -ten Grades von $f \in C^{m+1}(I)$ bzgl. der Partition $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, von $I = [a, b]$ für ungerade m bzw. bzgl.

$$\pi' := \{x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \mid i=0, \dots, n\} \text{ für gerade } m \text{ und}$$

$$\beta := \|\pi\| / \Delta \text{ für } \|\pi\| := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i) \text{ und}$$

$$\Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i). \text{ Der gerade Kern } \phi \in C_{0,2}^{\infty} \left[\frac{m}{2} \right] + 1 (\mathbb{R})$$

habe den Träger $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Für alle mit $h := \alpha \cdot \Delta$,
 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, und

$$\psi_h := \begin{cases} \phi_h & , m \text{ gerade} \\ \omega[\phi_{h/2}] & , m \text{ ungerade} \end{cases}$$

gebildeten Regularisierungen von s gilt dann

$$\| D^j (f - \psi_h * s) \|_{\infty} \leq \hat{K}_1 \cdot \| \pi \|^{m+1-j-\eta \cdot \frac{1}{2}} \cdot \| D^{m+1} f \|_{\infty}, \quad j=0, \dots, m$$

mit $\hat{K}_1 := K_1 \cdot (1 + 2 \cdot \frac{C(\psi, j, m)}{m!} \cdot (\frac{\alpha}{\beta})^{m-j})$, den Konstanten $C(\psi, j, m)$
 aus Satz 3.2(ii) und K_1 , $l=1, \dots, 6$, aus Satz 4.5, sowie
 $\eta := \delta_{11}$.

Beweis: Wegen der Wahl von h liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ in
 $\{x + \text{supp } \psi_h\} \cap \pi$ höchstens ein Partitionspunkt. Damit ist

Satz 3.2(ii) für $p=\infty$ anwendbar. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \| D^j (f - \psi_h * s) \|_{\infty} &\leq \| D^j (f - s) \|_{\infty} + \| D^j (s - \psi_h * s) \|_{\infty} \\ &\leq K_1 \cdot \| \pi \|^{m+1-j-\eta \cdot \frac{1}{2}} \cdot \| D^{m+1} f \|_{\infty} + \\ &\quad + \frac{C(\psi, j, m)}{m!} \cdot \max_{i=1, \dots, n} |s^{(m)}(x_i + 0) - s^{(m)}(x_i - 0)| \cdot h^{m-j}, \quad j=0, \dots, m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } |s^{(m)}(x_i + 0) - s^{(m)}(x_i - 0)| &\leq \\ &\leq |s^{(m)}(x_i + 0) - f^{(m)}(x_i)| + |f^{(m)}(x_i) - s^{(m)}(x_i - 0)| \leq \\ &\leq 2 \cdot \| D^m (f - s) \|_{\infty} \leq 2 \cdot K_1 \cdot \| \pi \|^{1-\eta \cdot \frac{1}{2}} \cdot \| D^{m+1} f \|_{\infty} \end{aligned}$$

und $h = \alpha \cdot \Delta = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \| \pi \|$ folgt durch Zusammenfassen die Behauptung. $\diamond$

Bleibt für eine Folge von Partitionen $\{\pi_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ mit
 $\| \pi_v \| \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$ die Folge $\{\beta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ergibt
 sich aus Satz 5.3 die gleichmäßige Konvergenz von

$$\{D^j (\psi_{h_v} * s_v)\}_{v \in \mathbb{N}} \text{ gegen } D^j f, \quad j=0, \dots, m.$$

Um die Konvergenz und Fehlerabschätzungen auch in anderen
 Normen und für die Regularisierungen weniger oft differen-
 zierbarer, d.h. also höher defizienter, Interpolations-

Splines zeigen zu können, schätzen wir nun die Normen des C^∞ -Interpolationsoperators bzgl. verschiedener Grundräume ab.

Sei s ein solcher defizienter Polynom-Spline, dessen j -te Ableitung, $j \in \mathbb{N}$, für den Partitionspunkt $u \in \pi \subset \mathbb{R}$ nicht existiert, so ist die Definition von s im folgenden jeweils durch $s^{(j)}(u) := 0$ zu ergänzen.

Satz 5.4:

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $H > 0$ und $h = \gamma \cdot H$ mit $\gamma > 0$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $I_h = [a-h, b+h]$, $f \in W_p^{(n)}(I_h)$ und $s \in L^p(I_h)$ eine Approximationsfunktion für f mit $\|s - f\|_{p, I_h} \leq M_1 \cdot H^n \cdot \|D^n f\|_{p, I_h}$. Dabei hänge M_1 weder von H noch von f ab. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ und $F := \phi_h * s$, so existiert eine von M_1, γ, n und ϕ abhängige Konstante C_1 , derart daß gilt

$$\|D^n F\|_{p, I} \leq C_1 \cdot \|D^n f\|_{p, I_h}.$$

(ii) Seien $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition von $I = [a, b]$ und $h := \alpha \cdot \Delta$ mit $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, wobei $\|\pi\|$, Δ und β wie in Satz 5.3 definiert sein sollen. Zwischen $f \in C^{m+1}(I)$ und $s \in \Pi_m(\pi) \cap C^1(\mathbb{R})$, $-1 \leq m \in \mathbb{N}$, mögen für $j = 1, 1, \dots, m$ die Relationen $\|D^j(f - s)\|_{L^\infty(I)} \leq M_2(j) \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{L^\infty(I)}$ gelten, wobei die Konstanten $M_2(j)$ von $\|\pi\|$ und f unabhängig seien. Definieren wir $F := \phi_h * s$ mit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, dann existiert eine von $M_2(j)$, $j = 1, 1, \dots, m$, $\alpha, \beta, m, 1$ und ϕ abhängige Konstante C_2 , derart daß gilt

$$\|D^{m+1}F\|_{\infty, I} \leq C_2 \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}.$$

Beweis:

ad (i): Aus $F = \phi_h * s = \phi_h * f + \phi_h * (s - f)$ folgt

$F^{(n)} = \phi_h * f^{(n)} + h^{-n} \cdot (\phi^{(n)})_h * (s-f)$. Wir definieren

$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & , x \in I_h \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$. Für alle $x \in I$ haben wir damit

$F^{(n)}(x) = \hat{F}_n(x)$, wobei $\hat{F}_n$ durch

$\hat{F}_n(x) := (\phi_h * f^{(n)})(x) + h^{-n} \cdot ((\phi^{(n)})_h * (\hat{s}-\hat{f}))(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

definiert sei. Wegen $s, f, f^{(n)} \in L^p(I_h)$ gilt $\hat{s}, \hat{f}, \hat{f}^{(n)} \in L^p(\mathbb{R})$

und wegen $\phi, \phi^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ liefert Lemma 1.2(i)

$\phi_h * \hat{f}^{(n)}, (\phi^{(n)})_h * (\hat{s}-\hat{f}) \in L^p(\mathbb{R})$, sowie

$$\begin{aligned} \|\hat{F}_n\|_p &\leq \|\phi_h * \hat{f}^{(n)}\|_p + h^{-n} \cdot \|(\phi^{(n)})_h * (\hat{s}-\hat{f})\|_p \leq \\ &\leq \|\hat{f}^{(n)}\|_p \cdot \|\phi_h\|_1 + h^{-n} \cdot \|\hat{s}-\hat{f}\|_p \cdot \|(\phi^{(n)})_h\|_1 = \\ &= \|\hat{f}^{(n)}\|_p \cdot \|\phi\|_1 + h^{-n} \cdot \|\hat{s}-\hat{f}\|_p \cdot \|\phi^{(n)}\|_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Fehlerabschätzung die Behauptung:

$$\begin{aligned} \|F^{(n)}\|_{p, I} &= \|\hat{F}_n\|_{p, I} \leq \|\hat{F}_n\|_p \leq \\ &\leq \|f^{(n)}\|_{p, I_h} \cdot \|\phi\|_1 + h^{-n} \cdot \|s-f\|_{p, I_h} \cdot \|\phi^{(n)}\|_1 \leq \\ &\leq \|f^{(n)}\|_{p, I_h} \cdot \|\phi\|_1 + M_1 \cdot \gamma^{-n} \cdot \|f^{(n)}\|_{p, I_h} \cdot \|\phi^{(n)}\|_1. \end{aligned}$$

ad (ii): Durch Übergang zur Distributionenfaltung folgt

mit der von $s \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ erzeugten Distribution T_s wegen

$F(x) = (\phi_h * s)(x) = T_{s(y)}(\phi_h(x-y)) = (T_s * \phi_h)(x)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} F^{(m+1)}(x) &= (\phi_h * s)^{(m+1)}(x) = (D^{m+1} T_s) * \phi_h(x) = \\ &= (D^{m+1} T_s)(y) (\phi_h(x-y)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (s^{(j)}(x_i+0) - s^{(j)}(x_i-0)) \cdot \delta_{x_i, y}^{(m-j)} (\phi_h(x-y)) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} \cdot \sum_{i=1}^n \phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \times \\ &\quad \times (s^{(j)}(x_i+0) - s^{(j)}(x_i-0)) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} \cdot \sum_{i=1}^n \phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \times \\ &\quad \times \{ (s^{(j)}(x_i+0) - f^{(j)}(x_i)) + (f^{(j)}(x_i) - s^{(j)}(x_i-0)) \}, x \in I. \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Fehlerabschätzung an, so gilt für $x \in I$:

$$\begin{aligned} F^{(m+1)}(x) &\leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \Phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right| \cdot x \\ &\quad \times \left\{ \left| s^{(j)}(x_{i+1}) - f^{(j)}(x_i) \right| + \left| f^{(j)}(x_i) - s^{(j)}(x_{i-1}) \right| \right\} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} \cdot 2 \cdot M_2(j) \cdot \|\pi\|^{m-j+1} \cdot x \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^n \left| \Phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right| = \\ &= 2 \cdot \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} \cdot M_2(j) \cdot \|\pi\|^{m-j+1} \cdot x \cdot \sum_{i=1}^n \left| \Phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right| \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^n \left| \Phi^{(m-j)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right| \end{aligned}$$

mit $x_K \in \{x_v \in \pi \mid |x-x_v| = \min_{i=1, \dots, n} |x-x_i|\}$, da $\pi \cap (x-h, x+h)$

höchstens ein Element enthält. Wegen $\|\pi\|/h = \beta/\alpha$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|F^{(m+1)}\|_{\infty, \mathbb{R}} &\leq 2 \cdot \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{h}\right)^{m-j+1} M_2(j) \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m+1-j} \|\pi\|^{m-j+1} \right\}_{\infty, \mathbb{R}} \cdot \\ &\quad \times \|f^{(m+1)}\|_{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir nun in der Lage, Fehlerabschätzungen für die Regularisierungen interpolierender stückweise polynomialer Approximationsfunktionen herzuleiten.

Hauptsatz 5.5: Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ und die Partitionen

$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, von $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und

$\sharp := \pi \cup \{[a-h, b+h]\}$ von $I_h := [a-h, b+h]$ mit $h := \alpha \cdot \Delta$ für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$,

wobei $\|\pi\|$, Δ und β wie in Satz 5.3 definiert sein sollen.

Die Funktion $f \in W_p^{(m+1)}(I_h)$ werde von $s \in \Pi_m(\sharp)$ bzgl. π für ungerades m bzw. $\pi' := \{x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \mid i=0, \dots, n\}$ für gerades m interpoliert und es gelte für $J \in \{I, I_h\}$:

$$\|D^j(s-f)\|_{p, J} \leq M \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p, J} \quad j=0, \dots, m,$$

wobei die Konstante M von f und $\|\pi\|$ unabhängig sei. Mit dem geraden Kern $\phi \in C_{0,2}^{\infty} \cdot \left[\frac{m}{2}\right] + 1(\mathbb{R})$, $\text{supp } \phi = [-1, 1]$, bilden wir

$$\psi_h := \begin{cases} \phi_h & , m \text{ gerade} \\ \omega[\phi_{h/2}] & , m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Mit einer von M, α, β, m und ϕ abhängigen Konstanten L gilt dann

$$\|D^j(f - \psi_h * s)\|_{p,I} \leq L \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p,I_h}, \quad j=0, \dots, m.$$

Beweis: Wegen $0 < h \leq \frac{\Delta}{2}$ interpoliert s auch $\psi_h * s$ bzgl. π bzw.

π' . Mit $h = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \|\pi\|$ und da $\Pi_m\{\pi\} \subset L^p(I_h)$ sind die Voraussetzungen von Satz 5.4(i) erfüllt. Also gilt:

$$\begin{aligned} \|D^j(f - \psi_h * s)\|_{p,I} &\leq \|D^j(f - s)\|_{p,I} + \|D^j(s - \psi_h * s)\|_{p,I} \\ &\leq M \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p,I_h} + \\ &\quad + M \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}(\psi_h * s)\|_{p,I} \\ &\leq M \cdot (C_1 + 1) \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p,I_h}, \\ &\quad j=0, \dots, m. \quad \diamond \end{aligned}$$

Für periodische Funktionen lassen sich diese Fehlerabschätzungen noch verbessern:

Korollar 5.6: Seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$,

$n \in \mathbb{N}$, mit $\beta = \|\pi\| / \Delta$ eine Partition von $I = [a, b]$. Die Funk-

tionen $f \in W_p^{(m+1)}(I)$ und $s \in \Pi_m\{\pi\}$ seien Einschränkungen

(b-a)-periodischer Funktionen auf I . Es werde f von s für

(un-) gerades m bzgl. $\pi'(\pi)$ interpoliert und es gelte für

$j=0, \dots, m$

$$\|D^j(s - f)\|_{p,I} \leq M \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p,I},$$

wobei M von f und $\|\pi\|$ unabhängig sei. Für $h := \alpha \cdot \Delta$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$,

und den Kern ψ_h aus Satz 5.5 gilt dann

$$\|D^j(f - \psi_h * s)\|_{p,I} \leq N \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{p,I}, \quad j=0, \dots, m,$$

mit einer von M, α, β, m, p und ϕ abhängigen Konstanten N .

Beweis: Auf Grund der Wahl von h und ψ_h interpoliert s auch $\psi_h * s$ bzgl. π' bzw. π . Wegen $\Pi_m\{\pi\} \subset L^P(I)$ ist $s \in L^P(I)$ und aus der Periodizität von s folgt die von $\psi_h * s$. Für $j=0, \dots, m$ gilt somit nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \| D^j (f - \psi_h * s) \|_{p, I} &\leq \| D^j (f - s) \|_{p, I} + \| D^j (s - \psi_h * s) \|_{p, I} \leq \\ &\leq M \cdot \| \pi \|^{m+1-j} \cdot (\| D^{m+1} f \|_{p, I} + \| D^{m+1} (\psi_h * s) \|_{p, I}). \end{aligned}$$

Für $(b-a)$ -periodische Funktionen $g \in L^P(I)$ haben wir

$$\begin{aligned} \| g \|_{p, I_h}^p &= \int_{a-h}^{b+h} |g(x)|^p dx = \\ &= \int_I |g(x)|^p dx + \int_{a-h}^a |g(x)|^p dx + \int_b^{b+h} |g(x)|^p dx = \\ &= \int_I |g(x)|^p dx + \int_{b-h}^b |g(x)|^p dx + \int_a^{a+h} |g(x)|^p dx \leq \\ &\leq 2 \cdot \| g \|_{p, I}^p. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Beziehung für $g=f^{(m+1)}$ und $g=s-f$ in die letzte Abschätzung des Beweises von Satz 5.4(i) ein, dann erhalten wir

$$\| D^{m+1} (\psi_h * s) \|_{p, I} \leq C_3 \cdot \| D^{m+1} f \|_{p, I}$$

mit einer nur von M, α, β, m, p und ϕ abhängigen Konstanten

C_3 . Sei nun $N := M \cdot (1 + C_3)$, so ergibt sich die Behauptung. $\diamond$

In Satz 5.3 haben wir einfache Splines m -ten Grades regulärisiert, die die Funktion f interpolieren, und festgestellt, daß die Faltungen und ihre Ableitungen gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von f konvergieren. Da wir in den Fehlerabschätzungen $(m+1)$ -malige stetige Differenzierbarkeit von f vorausgesetzt haben, stellt sich nun die Frage, ob auch $(\phi_h * s)^{(m+1)} \rightarrow f^{(m+1)}$ für $\| \pi \|, h \rightarrow 0$ gilt,

denn im Gegensatz zu $s^{(m+1)}$ existiert $(\phi_h * s)^{(m+1)}$. Wie der folgende Satz zeigen wird, läßt sich diese Konvergenz unter gewissen Voraussetzungen nachweisen.

Hauptsatz 5.7: Sei $n \in \mathbb{N}$, $\pi := \{x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n+1} \mid i=0, \dots, n+1\}$ eine uniforme Partition von $I=[a,b]$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 5, \dots\}$,

$f \in C^{m+1}(I)$ und $s \in \Pi_m\{\pi\} \cap C^{m-1}(I)$ definiert durch

- (1) $s(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2})$, für $m=0, 2$ und alle
 $x_{i+1/2} \in \pi' := \{x_{j+1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \mid j=0, \dots, n\}$ sowie
 $s(x_i) = f(x_i)$, $i=0, n+1$ und $m=2$;
 (2) $s(x_i) = f(x_i)$, $i=0, \dots, n+1$ und $m \in \{1, 3, \dots\}$,
 und s sei $(b-a)$ -periodisch für $m \geq 3$.

Der Kern $\phi \in C_{0,2}^{\infty}[\frac{m}{2}+1](\mathbb{R})$ sei gerade und habe den Träger $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Dann gilt:

$$(i) \quad \|D^j(f - \phi_H * s)\|_{\infty, J} \leq \left\{ \frac{2 \cdot C(\phi, j, m)}{m!} \cdot H^{m+1-j} + \epsilon_j \cdot \|\phi\|_1 \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \right\} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I},$$

$j=0, \dots, m,$

wobei $H > 0$, $J = [a+H, b-H]$ bzw. $J=I$ für $(b-a)$ -periodische Funktionen f und s sowie $C(\phi, j, m)$ und ϵ_j die Konstanten aus den Sätzen 3.2 und 4.5 seien;

$$(ii) \quad \|D^{m+1}(f - \phi_H * s)\|_{\infty, K} = O(\max\{\omega(f^{(m+1)}, H), \frac{\|\pi\|}{H}\})$$

mit $K = [a+H, b-H]$, falls für $H > 0$ und $H, \|\pi\| \rightarrow 0$ auch $\|\pi\|/H \rightarrow 0$ gilt.

Bevor wir an den Beweis dieses Satzes gehen können, benötigen wir noch eine Aussage über die Sprungunstetigkeiten von $s^{(m)}$ an den Knoten von π und einen expliziten Ausdruck für das Faltungsintegral $(\phi_h * s)(x)$ für den Fall, daß in

$x + \text{supp } \phi_h$ mehr als ein Knoten der Spline-Funktion s enthalten ist.

Satz 5.8: Sei $m \in \mathbb{N}$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $s \in \Pi_m \{ \pi \} \wedge C^{v-1}(\mathbb{R})$, $0 \leq v \leq m+1$. Weiterhin sei $\phi \in C_{0,2}^{\infty} \left[\frac{m}{2} \right] + 1(\mathbb{R})$ gerade mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dx^j} (\phi_h * s)(x) &= \frac{d^j}{dx^j} \int_{l=0}^m (-1)^l \cdot \frac{h^l}{l!} \cdot s^{(l)}(x+h-0) - \\ &\quad - \int_{l=v}^m (-h)^{l-j} \cdot \int_{i=p}^q (s^{(l)}(x_i+0) - s^{(l)}(x_i-0)) \times \\ &\quad \times (J^{l+1-j} \phi) \left(\frac{x_i - x}{h} \right) \end{aligned}$$

mit $\{x_p, \dots, x_q\} = (x-h, x+h) \cap \pi$.

Beweis: Wir definieren $x_{p-1} := x-h$ und $x_{q+1} := x+h$ und berechnen

$$\begin{aligned} (\phi_h * s)(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{y}{h}\right) \cdot s(x+y) dy = \\ &= \int_{i=p-1}^q \frac{1}{h} \cdot \int_{x_i-x}^{x_{i+1}-x} \phi\left(\frac{y}{h}\right) \cdot s(x+y) dy = \\ &= \int_{i=p-1}^q \frac{1}{h} \cdot \left\{ \left[h \cdot (J^1 \phi) \left(\frac{y}{h} \right) \cdot s(x+y) \right]_{x_i-x}^{x_{i+1}-x} - \right. \\ &\quad \left. - h \cdot \int_{x_i-x}^{x_{i+1}-x} (J^1 \phi) \left(\frac{y}{h} \right) \cdot s'(x+y) dy \right\}, \end{aligned}$$

da ϕ gerade und $s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \Pi_m$, $i=p-1, \dots, q$, ist. Wiederholte partielle Integration wie im Beweis des Lemmas 3.5 liefert nun

$$\begin{aligned} (\phi_h * s)(x) &= \sum_{i=p-1}^q \int_{l=0}^m (-1)^l \cdot h^l \cdot \left\{ (J^{l+1} \phi) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right) \cdot s^{(l)}(x_{i+1}-0) - \right. \\ &\quad \left. - (J^{l+1} \phi) \left(\frac{x_i-x}{h} \right) \cdot s^{(l)}(x_i+0) \right\} \\ &= \sum_{l=0}^m (-h)^l \cdot \left\{ \sum_{i=p}^q (s^{(l)}(x_i-0) - s^{(l)}(x_i+0)) \times \right. \\ &\quad \left. \cdot (J^{l+1} \phi) \left(\frac{x_i-x}{h} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$-s^{(1)}(x-h+0) \cdot (J^{1+1}\phi)(-1) + \\ +s^{(1)}(x+h-0) \cdot (J^{1+1}\phi)(1) \} .$$

Da die iterierten Integrale von ϕ aus $C^\infty(\mathbb{R})$ sind, folgt die Behauptung nun wegen $(J^{j+1}\phi)(1) = \frac{1}{j!}$, $j=0, \dots, m$.

Satz 5.9: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\pi := \{x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n+1} \mid i=0, \dots, n+1\}$ eine uniforme Partition von $I=[a, b]$ mit $\|\pi\| = \frac{b-a}{n+1}$, $f \in C^{m+1}(I)$ und $s \in \Pi_m(\pi) \cap C^{m-1}(I)$ die in Satz 5.7 definierte Spline-Funktion. Dann gilt

$$s^{(m)}(x_i+0) - s^{(m)}(x_i-0) = \|\pi\| \cdot (f^{(m+1)}(x_i) + \eta_i)$$

mit $\eta_i = O(\omega(f^{(m+1)}, \|\pi\|))$, $i=1, \dots, n$ und $m=0, 1, 2, 3, 5, \dots$.

Beweis: Wir beweisen hier den quadratischen Fall, d.h. $m=2$.

In $[x_i, x_{i+1}]$ läßt sich s darstellen als

$$s(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2, \quad i=0, \dots, n.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten benutzen wir die Interpolationsbedingungen

$a_0 = f_0$, $a_{n+1} = f_{n+1}$ und $f_{i+1/2} = a_i + \frac{h}{2} \cdot b_i + \frac{h^2}{4} \cdot c_i$, $i=0, \dots, n$,
mit $f_j := f(x_j)$, sowie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von s in den Partitionspunkten x_i :

$$a_{i+1} = a_i + h \cdot b_i + h^2 \cdot c_i, \quad i=0, \dots, n-1,$$

$$b_{i+1} = b_i + 2h \cdot c_i, \quad i=0, \dots, n-1.$$

Eliminieren wir die Unbekannten a_i , a_{i+1} und c_i aus der Stetigkeitsbedingung mit Hilfe der übrigen Gleichungen, dann erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$3b_0 + b_1 = 4[f_0, f_{1/2}],$$

$$\frac{1}{2}b_{i-1} + 3b_i + \frac{1}{2}b_{i+1} = 4[f_{i-1/2}, f_{i+1/2}], \quad i=1, \dots, n,$$

$$b_n + 3b_{n+1} = 4[f_{n+1/2}, f_{n+1}],$$

das wegen der Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar ist. Wir führen nun $\sigma_i := (b_{i+1} - b_i)/h$, $i=0, \dots, n$, und $h = \|\pi\|$ ein und subtrahieren die j -te Gleichung des obigen Systems von der $(j+1)$ -ten, $j=0, \dots, n$. Division der ersten und letzten Gleichung durch $\frac{3}{2}h$ und der übrigen durch $2h$ liefert für die σ_i das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{10}{3}\sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_1 &= 8[f_0, f_{1/2}, f_{3/2}] \quad , \\ \frac{1}{2}\sigma_{i-1} + 3\sigma_i + \frac{1}{2}\sigma_{i+1} &= 8[f_{i-1/2}, f_{i+1/2}, f_{i+3/2}] \quad , \quad i=1, \dots, n-1, \\ \frac{2}{3}\sigma_{n-1} + \frac{10}{3}\sigma_n &= 8[f_{n-1/2}, f_{n+1/2}, f_{n+1}] \quad . \end{aligned}$$

Auf dieses System wenden wir noch einmal die gleichen Operationen an, dividieren jedoch durch $3h$ bzw. $\frac{5}{2}h$ und erhalten für die Unbekannten $\delta_i := (\sigma_{i+1} - \sigma_i)/(2h)$,

$i=0, \dots, n-1$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{17}{5}\delta_0 + \frac{3}{5}\delta_1 &= 12[f_0, f_{1/2}, f_{3/2}, f_{5/2}] \quad , \\ \frac{1}{2}\delta_{i-1} + 3\delta_i + \frac{1}{2}\delta_{i+1} &= 12[f_{i-1/2}, f_{i+1/2}, f_{i+3/2}, f_{i+5/2}] \quad , \\ &\quad i=1, \dots, n-2, \\ \frac{3}{5}\delta_{n-2} + \frac{17}{5}\delta_{n-1} &= 12[f_{n-3/2}, f_{n-1/2}, f_{n+1/2}, f_{n+1}] \quad . \end{aligned}$$

Sei jetzt $A_n = (a_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{5} & \frac{3}{5} & & & & \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

und $A_n^{-1} = (b_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$. Dann gilt nach KERSHAW [13]:

$$1 < b_{ii}^{(n)} < \frac{1}{a_{ii}^{(n)}} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_i - 1} \text{ mit } \mu_1 = \mu_n = \frac{51}{5} \text{ und } \mu_i = 9 \text{ sonst, } i=1, \dots, n,$$

sowie

$$0 < (-1)^{i-j} \cdot b_{ij}^{(n)} < \frac{1}{a_{11}^{(n)}} \cdot \frac{\mu_j}{\mu_j - 1}, \quad \begin{matrix} l=\max(i,j) \\ \text{---} \\ l=\min(i,j) \end{matrix} \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}\|_{\infty} &= \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}^{(n)}| < \\ &< \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(n)}} \cdot \frac{\mu_j}{\mu_j - 1} \\ &< \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} + 2 \cdot \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{3}\right)^j\right) \leq \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} + 2 \cdot \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j\right) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

d.h. es gibt ein $0 < C \leq \frac{3}{4}$, derart daß $\|A_n^{-1}\|_{\infty} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir definieren nun $G := \text{diag}(4, \dots, 4) \in \text{Mat}(n, n)$ und $E := \text{diag}(1, \dots, 1) \in \text{Mat}(n, n)$. Dann verschwinden die Summen der Elemente jeder Zeile von $G^{-1}A_n - E$. Sei g die rechte Seite des den Vektor δ bestimmenden Gleichungssystems, dann folgt aus $A_n \delta = g$ die Beziehung $A_n \delta - G^{-1}A_n g = (E - G^{-1}A_n)g$. Wegen $f \in C^3(I)$ gilt $\frac{g_i}{12} = \frac{1}{6} f'''(\xi_i)$ mit $|\xi_i - x_{i+1}| < \frac{3}{2}h$, $i=0, \dots, n-1$, d.h. also $\frac{g_i}{12} = \frac{1}{6} (f'''(x_{i+1}) + \varepsilon_{i+1})$ mit $|\varepsilon_{i+1}| \leq \omega(f''', \frac{3}{2}h)$. Zur Abschätzung von $\|(E - G^{-1}A_n)g\|_{\infty}$ berechnen wir für $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$g_i - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} g_{i-1} + 3g_i + \frac{1}{2} g_{i+1} \right) = 2f'''(\xi_i) - \frac{1}{4} (f'''(\xi_{i-1}) + 6f'''(\xi_i) + f'''(\xi_{i+1})) =: \tau_i$$

mit $|\tau_i| \leq \frac{1}{2}\omega(f''', 4h)$. Nach einer ähnlichen Abschätzung für $i=0$ und $i=n-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(E - G^{-1}A_n)g\|_{\infty} &\leq \frac{1}{2}\omega(f''', 4h). \text{ Daraus ergibt sich nun} \\ \|\delta - A_n^{-1}G^{-1}A_n g\|_{\infty} &= \|\delta - \frac{1}{4}g\|_{\infty} \leq \|A_n^{-1}\|_{\infty} \cdot \|(E - G^{-1}A_n)g\|_{\infty} \\ &\leq \frac{C}{2} \cdot \omega(f''', 4h). \end{aligned}$$

Für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ heißt das

$$|\delta_i - \frac{1}{4}g_i| = \left| \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{2h} - \frac{1}{2} \cdot f'''(x_{i+1}) - \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{i+1} \right| \leq \frac{C}{2} \cdot \omega(f''', 4h),$$

woraus wegen $\sigma_i = s''| [x_i, x_{i+1}]$ die Behauptung für $m=2$ folgt.

Da s für $m=0,1$ bereits lokal durch die Interpolationsdaten eindeutig bestimmt ist, kann man hier die Behauptung sofort durch direkte Berechnung der Größen δ_i zeigen, und zwar auch für beliebige Partitionen. Man erhält dann

$$s^{(m)}(x_{i+1}) - s^{(m)}(x_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot (f^{(m+1)}(x_i) + \eta_i), \quad i=1, \dots, n.$$

In den anderen Fällen gilt der Satz nach AHLBERG-NILSON-WALSH [2, Theorem 2.9.5 und 4.6.4]. $\diamond$

Der obige Satz läßt sich für $m=2$ und bei vorgegebenen ersten Ableitungen von s in ∂I für $m=3$ auch dann beweisen, wenn man anstatt uniforme Partitionen vorauszusetzen nur fordert, daß $\beta = \|\pi\|/\Delta$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 geht. Das wurde für den periodischen kubischen Spline von AHLBERG-NILSON-WALSH [2] durchgeführt. Da die entsprechenden Rechnungen und Abschätzungen jedoch sehr verwickelt und unübersichtlich sind, wurde hier auf diesen etwas allgemeineren Fall verzichtet.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum

Beweis von Hauptsatz 5.7:

ad (i): Für $x \in J$ und $j \in \{0, \dots, m\}$ gilt

$$\begin{aligned} |D^j(f - \phi_H * s)(x)| &= |D^j(f - \phi_H * f + \phi_H * (f - s))(x)| \\ &\leq |D^j(f - \phi_H * f)(x)| + |\phi_H * (s - f)^{(j)}(x)|. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$|\phi_H * (s - f)^{(j)}(x)| = \frac{1}{H} \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{y}{H}\right) \cdot (s - f)^{(j)}(x - y) dy \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{H} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{Y}{H}\right) \right| \cdot \left| (s-f)^{(j)}(x-y) \right| dy \\ &\leq \frac{1}{H} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{Y}{H}\right) \right| dy \cdot \left\| D^j (s-f) \right\|_{\infty, I} \\ &\leq \left\| \Phi \right\|_1 \cdot \varepsilon_j \cdot \left\| \pi \right\|^{m+1-j} \cdot \left\| D^{m+1} f \right\|_{\infty, I} . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Anwendung von Satz 3.8 und Übergang zur Norm.

ad (ii): Die Approximation von $\int_I g(t)dt$ nach der Trapezregel für die Schrittweite h bezeichnen wir mit $T(g, I, h)$. Aus den Sätzen 5.8 und 5.9 folgt dann für $x \in K$:

$$\begin{aligned} (\Phi_H * s)^{(m+1)}(x) &= \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n (s^{(m)}(x_i + 0) - s^{(m)}(x_i - 0)) \cdot \Phi\left(\frac{x - x_i}{H}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left\| \pi \right\| \cdot f^{(m+1)}(x_i) + \left\| \pi \right\| \cdot \eta_i \right) \cdot \frac{1}{H} \cdot \Phi\left(\frac{x - x_i}{H}\right) \\ &= \left\| \pi \right\| \cdot \sum_{i=1}^n f^{(m+1)}(x_i) \cdot \frac{1}{H} \cdot \Phi\left(\frac{x - x_i}{H}\right) + \\ &\quad + \left\| \pi \right\| \cdot \sum_{i=1}^n \eta_i \cdot \frac{1}{H} \cdot \Phi\left(\frac{x - x_i}{H}\right) \\ &= T(f^{(m+1)} * \Phi_H)(x), I, \left\| \pi \right\| + R. \end{aligned}$$

Nach Satz 5.9 gilt für den Restterm R :

$$\begin{aligned} |R| &\leq \max_{i=1, \dots, n} \left| \eta_i \right| \cdot \left(\left\| \pi \right\| \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{H} \cdot \left| \Phi\left(\frac{x - x_i}{H}\right) \right| \right) = \\ &= O(\omega(f^{(m+1)}, \left\| \pi \right\|) \cdot T(|\Phi_H(x-.)|, I, \left\| \pi \right\|)). \end{aligned}$$

Bekanntlich ist $\left| \int_I g(t)dt - T(g, I, h) \right| \leq 2 \cdot |I| \cdot \omega(g, h)$, woraus wegen $\text{supp } |\Phi_H(x-.)| = [x - H, x + H]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} T(|\Phi_H(x-.)|, I, \left\| \pi \right\|) &\leq \left\| \Phi_H(x-.) \right\|_1 + \\ &\quad + 4(H + \left\| \pi \right\|) \cdot \omega(|\Phi_H(x-.)|, \left\| \pi \right\|) \\ &\leq \left\| \Phi \right\|_1 + 8 \cdot \left(1 + \frac{\left\| \pi \right\|}{H} \right) \cdot \left\| \Phi \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

folgt. Da $f^{(m+1)}$ stetig ist, gilt nach Satz 3.7

$$|f^{(m+1)}(x) - (\Phi_H * f^{(m+1)})(x)| \leq \left\| \Phi \right\|_1 \cdot \omega(f^{(m+1)}, H).$$

Zusammenfassend erhalten wir jetzt:

$$\begin{aligned} |f^{(m+1)}(x) - (\phi_H * s)^{(m+1)}(x)| &\leq |f^{(m+1)}(x) - (\phi_H * f)^{(m+1)}(x)| + \\ &\quad + |(\phi_H * f)^{(m+1)}(x) - (\phi_H * s)^{(m+1)}(x)| \\ &\leq \|\phi\|_1 \cdot \omega(f^{(m+1)}, H) + |(\phi_H * f)^{(m+1)}(x) - \\ &\quad - T((\phi_H * f)^{(m+1)}(x), I, \|\pi\|)| + |R|. \end{aligned}$$

Es bleibt der Fehler bei der Trapezsummenapproximation von $(\phi_H * f)^{(m+1)}(x)$ abzuschätzen. Da der Integrand durch einen interpolierenden Polygonzug angenähert wird, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} |(\phi_H * f)^{(m+1)}(x) - T((\phi_H * f)^{(m+1)}(x), I, \|\pi\|)| &= \\ \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{1}{H} \cdot \phi\left(\frac{x-y}{H}\right) \cdot f^{(m+1)}(y) - \frac{1}{H} \cdot \phi\left(\frac{x-x_i}{H}\right) \cdot f^{(m+1)}(x_i) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{y-x_i}{\|\pi\|} \cdot \left[\frac{1}{H} \cdot \phi\left(\frac{x-x_{i+1}}{H}\right) \cdot f^{(m+1)}(x_{i+1}) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{H} \cdot \phi\left(\frac{x-x_i}{H}\right) \cdot f^{(m+1)}(x_i) \right] \right\} dy \right| \leq \\ \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{1}{H} \cdot \left| \phi\left(\frac{x-x_i}{H}\right) \right| \cdot |f^{(m+1)}(y) - f^{(m+1)}(x_i)| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H^2} \cdot \left| \phi'\left(\frac{x-\xi_i}{H}\right) \right| \cdot |f^{(m+1)}(y)| \cdot (y-x_i) \right\} dy + \\ + \sum_{i=0}^n \frac{\|\pi\|}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{H} \cdot \left| \phi\left(\frac{x-x_i}{H}\right) \right| \cdot |f^{(m+1)}(x_{i+1}) - f^{(m+1)}(x_i)| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H^2} \cdot \left| \phi'\left(\frac{x-\xi_{i+1}}{H}\right) \right| \cdot |f^{(m+1)}(x_{i+1})| \cdot \|\pi\| \right\}, \end{aligned}$$

für $\xi_i \in (x_i, y)$ und $\xi_{i+1} \in (x_i, x_{i+1})$, $i=0, \dots, n$, nach dem Mittelwertsatz. Wegen $|\text{supp } \phi_H| = 2H$ sind jeweils höchstens

$$\left\lceil \frac{2H}{\|\pi\|} \right\rceil + 2 \leq 2 \cdot \frac{H + \|\pi\|}{\|\pi\|} \text{ Glieder obiger Summen von Null}$$

verschieden. Mithin gilt

$$\begin{aligned} & |(\phi_H * f^{(m+1)})(x) - T((\phi_H * f^{(m+1)})(x), I, \|\pi\|)| \leq \\ & 2 \cdot \frac{H + \|\pi\|}{\|\pi\|} \cdot \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{\|\pi\|}{H} \cdot \|\phi\|_\infty \cdot \omega(f^{(m+1)}, \|\pi\|) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\|\pi\|}{H} \right)^2 \cdot \|\phi'\|_\infty \cdot \|f^{(m+1)}\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Durch Übergang zur Norm folgt schließlich mit einem festen $c > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^{m+1}(f - \phi_H * s)\|_{\infty, K} &\leq \|\phi\|_1 \cdot \omega(f^{(m+1)}, H) + \\ &\quad + c \cdot (\|\phi\|_1 + 8 \cdot (1 + \frac{\|\pi\|}{H}) \cdot \|\phi\|_\infty) \times \\ &\quad \times \omega(f^{(m+1)}, \|\pi\|) + \\ &\quad + 3 \cdot (1 + \frac{\|\pi\|}{H}) \cdot \|\phi\|_\infty \cdot \omega(f^{(m+1)}, \|\pi\|) + \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\|\pi\|}{H} \cdot (1 + \frac{\|\pi\|}{H}) \cdot \|\phi'\|_\infty \cdot \|f^{(m+1)}\|_\infty \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

wenn mit H und $\|\pi\|$ auch $\|\pi\|/H$ gegen Null strebt. Aus der letzten Abschätzung folgt dann sofort die Behauptung. $\diamond$

§ 6 Zur C^∞ -Lagrange- und C^∞ -Hermite-Interpolation

Im letzten Paragraphen haben wir nur einfache Splines des Grades $m \in \mathbb{N}$, d.h. Splines der Defizienz 1, geglättet, wodurch wir erreichten, daß auch die m -ten und $(m+1)$ -ten Ableitungen der Approximationsfunktionen stetig waren und gegen die entsprechenden Ableitungen der interpolierten Funktion f konvergierten, von der wir $(m+1)$ -malige Differenzierbarkeit verlangt haben. Nun überführt aber die Faltungstransformation jeden Spline s völlig unabhängig von seiner Defizienz in eine C^∞ -Funktion und die Sätze 5.1 und 5.4 fordern auch nur, daß s in Umgebungen der Interpolationsknoten stetig ist und daß Abschätzungen für $\|s-f\|_p$ bzw. für die unstetigen Ableitungen von $f-s$ in der $L^\infty(I)$ -Norm bekannt sind. Da diese Voraussetzungen für viele Verfahren, die stückweise polynomiale Interpolationsfunktionen hoher Defizienz liefern, erfüllt sind, können wir auf sie die im letzten Paragraphen entwickelte Theorie anwenden. Dies werden wir nun an einigen Beispielen zur Lagrange-, Hermite- und Hermite-Birkhoff-Interpolation durchführen und dabei aus z.T. bereits lokal eindeutig bestimmten Splines C^∞ -Interpolationsfunktionen gewinnen. Wir werden zeigen, daß die lokalen Approximationsordnungen der Splines für die regularisierten Splines überall gelten. Eine weitere mögliche Anwendung der Methode zur Glättung von Spline-Funktionen, auf die wir allerdings nicht weiter eingehen werden, sei hier kurz erwähnt. Die Finite-Elemente-

Näherungen der Lösungen von Differentialgleichungen sind i.a. stückweise polynomiale Funktionen hoher Defizienz. Durch Regularisierung dieser Funktionen erhalten wir Approximationen der exakten Lösungen, die die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie letztere besitzen. Wir beginnen mit der Verallgemeinerung eines bekannten Satzes (vgl. NATANSON [14]), die wir in den folgenden Fehlerabschätzungen benötigen werden.

Lemma 6.1: Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^{k+1}[a, b]$ und $Hf \in \Pi_k$ das Hermite-Interpolationspolynom bzgl. der Knoten $a = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b$, $l \in \mathbb{N}$, und der Daten

$$(Hf)^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad i=0, \dots, v_j, \quad j=0, \dots, l,$$

mit $\sum_{j=0}^l (v_j+1) = k+1$. Dann gilt für $j=0, \dots, k$:

$$\|D^j(f-Hf)\|_{\infty, [a, b]} \leq (b-a)^{k+1-j} \cdot \|D^{k+1}f\|_{\infty, [a, b]}.$$

Beweis: Die Funktion $g := f - Hf \in C^{k+1}[a, b]$ besitzt in den Knoten x_i (v_i+1) -fache Nullstellen, $i=0, \dots, l$. Da g insbesondere in allen $l+1$ Punkten x_i verschwindet, hat g' nach dem Satz von Rolle jeweils mindestens eine Nullstelle in den offenen Intervallen $(x_0, x_1), \dots, (x_{l-1}, x_l)$. Sei

$n := \max_{i=0, \dots, l} v_i$, so bezeichnen wir für $j=0, \dots, n$ mit μ_j die Anzahl der Elemente der Menge

$$N_j := \{x_i \mid i=0, \dots, l; g^{(m)}(x_i) = 0, m=0, \dots, j\}.$$

Also hat g' mindestens $l + \mu_1$ Nullstellen. Der gleiche Schluß ergibt die Existenz von wenigstens $l-1 + \mu_1 + \mu_2$ Nullstellen von g'' . Durch Induktion folgt nun, daß $g^{(j)}$ mindestens $\sum_{m=0}^j \mu_m - j$ Nullstellen besitzt, $j=0, \dots, n$.

Wegen $\sum_{m=0}^n \mu_m = \sum_{i=0}^l (v_i+1) = k+1$ hat $g^{(n)}$ noch $k+1-n$ Nullstellen.

Der erweiterte Satz von Rolle liefert nun für $j=n+1, \dots, k$ die Existenz von mindestens $k+1-j$ Nullstellen von $g^{(j)}$.
 Mitin gibt es für jede Ableitung $g^{(j)}$ mindestens ein $\eta_j \in [a, b]$ mit $g^{(j)}(\eta_j) = 0$, $j=0, \dots, k$. Aus

$$\begin{aligned} \|g^{(j)}\|_{\infty} &= \sup_{x \in [a, b]} |g^{(j)}(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_{\eta_j}^x g^{(j+1)}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |x - \eta_j| \cdot \|g^{(j+1)}\|_{\infty}, [\eta_j, x] \leq \\ &\leq (b-a) \cdot \|g^{(j+1)}\|_{\infty}, j=0, \dots, k, \end{aligned}$$

und $g^{(k+1)} = f^{(k+1)}$ folgt nun sofort durch Induktion die Behauptung. $\diamond$

Ein sehr bekanntes Verfahren zur Lagrange-Interpolation ist die stückweise zentrale Polynominterpolation.

Bei Verwendung von Polynomen ungeraden Grades liefert sie i.a. nur stetige Approximationen und bei Verwendung von Polynomen geraden Grades sogar Interpolationsfunktionen mit Sprungunstetigkeiten.

Wir geben nun eine leichte Modifikation dieses Verfahrens an: die Interpolationsfunktionen sollen Hermite-Randbedingungen erfüllen.

Gegeben sei die Partition $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, des Intervalls $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit

$$\|\pi\| := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i), \Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$$

und $\beta := \|\pi\| / \Delta$. Weiterhin seien $h := \alpha \cdot \Delta$ mit $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$

und $f \in C^{m+1}(I)$. Wir definieren $l := [\frac{m}{2}]$, $k := m - 2l$ und erweitern

π zur Partition $\pi' : a = x_{-1} = x_{-l+1} = \dots = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+1+l} = b$. Außerdem seien

$f(x_{-j}) := f^{(j)}(x_0)$ bzw. $f(x_{n+1+j}) := f^{(j)}(x_{n+1})$, $j=1, \dots, l$.

Für $i \in \{0, \dots, n+1-k\}$ existiert genau ein $p_i \in \Pi_m$ (vgl. NATANSON [14]) mit $p_i(x_{i+j}) = f(x_{i+j})$, $j=-1, \dots, l+k$.

Nach Lemma 6.1 gilt für $i \in \{0, \dots, n+1-k\}$ und $j=0, \dots, m$:

$$\|D^j(f-p_i)\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1+k}]} \leq (x_{i+1+k} - x_{i-1})^{m+1-j} \times \|D^{m+1}f\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1+k}]}.$$

Wir definieren die Funktion p durch

$$p(x) := p_i(x) \text{ für } x \in \begin{cases} [x_i, x_{i+1}) & , k=1 \\ [\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i), \frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})) & , k=0 \end{cases},$$

$i \in \{0, \dots, n+1-k\}$.

Durch Maximumbildung ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\|D^j(f-p)\|_{\infty, I} \leq (m \cdot \|\pi\|)^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, m.$$

Aussagen über die Regularisierungen von p macht der

Satz 6.2: Seien $f \in C^{m+1}(I)$, $m \geq 1$, $l = [\frac{m}{2}]$, $k=m-2l$ und p definiert

wie oben. Weiterhin sei ϕ ein gerader Kern aus $C_{0,m}^{\infty}(\mathbb{R})$

mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Dann gilt für alle $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ bzw. alle

$h = \alpha \cdot \Delta$ und alle damit konstruierten Kerne

$$\psi_h := \begin{cases} \phi_h & , k=0 \\ \omega[\phi_{h/2}] & , k=1 \end{cases}$$

(i) $(\psi_h * p)(x_i) = f(x_i)$, $i=-1, \dots, n+1+l$;

(ii) es gibt von α, β, m, j und ϕ abhängige Konstanten

$K(\alpha, \beta, m, j, \phi)$, so daß für $j=0, \dots, m$

$$\|D^j(f - \psi_h * p)\|_{\infty, I} \leq K(\alpha, \beta, m, j, \phi) \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \times \|D^{m+1}f\|_{\infty, I} \text{ folgt.}$$

Beweis:

(i) Wir erweitern die Definition von p auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$p(x) := p_0(x)$, $x \leq x_0$, und $p(x) := p_{n+1-k}(x)$, $x \geq x_{n+1}$. Wegen $p \in \Pi_m \cap C^{k-1}(\mathbb{R})$ sind die Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt. Nach Satz 5.1(ii) bzw. (iv) gilt die Behauptung.

(ii) Wie oben ausgeführt, haben wir für $j=k, \dots, m$:

$$\|D^j(f-p)\|_{\infty, I} \leq m^{m+1-j} \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}.$$

Nun ist Satz 5.4(ii) anwendbar, der die Existenz einer von α, β, m und ϕ abhängigen Konstanten C_2 liefert, derart daß $\|D^{m+1}\psi_h * p\|_{\infty, I} \leq C_2 \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}$ gilt. Wegen (i) ist p auch die Interpolierende der Funktion $\psi_h * p$. Damit gilt

$$\|D^j(f - \psi_h * p)\|_{\infty, I} \leq \|D^j(f-p)\|_{\infty, I} + \|D^j(p - \psi_h * p)\|_{\infty, I} \leq$$

$$\leq m^{m+1-j} \cdot (1+C_2) \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I},$$

$$j=0, \dots, m. \quad \diamond$$

Wir wenden uns nun der (0-m)-Hermite-Interpolation, $m \in \mathbb{N}$, zu. Ausgehend von drei Verfahren, die stückweise polynomiale Interpolationsfunktionen hoher Defizienz erzeugen, werden wir die Interpolations- und Konvergenzeigenschaften der entsprechenden Regularisierungen untersuchen.

Eine sehr einfache Möglichkeit zur Konstruktion von

(0-m)-Hermite-Interpolierenden aus C^∞ wird angegeben im

Satz 6.3: Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$,

$A := \{a_{ij} \in \mathbb{R} \mid i=1, \dots, n \text{ und } j=0, \dots, m\}$ und die Partitionen

$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ und

$\pi' := \{\xi_0 := a; \xi_i := \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), i=1, \dots, n-1; \xi_n = b\}$ von I .

Dann existieren Funktionen $F \in C^\infty(I)$ mit

$$F^{(j)}(x_i) = a_{ij}, \quad i=1, \dots, n \text{ und } j=0, \dots, m.$$

Beweis: Sei $i \in \{1, \dots, n\}$, dann definieren wir auf

$[\xi_{i-1}, \xi_i]$ das Taylorpolynom $p_i \in \Pi_m$:

$p_i(x) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \cdot a_{ij} \cdot (x - x_i)^j$. Sei $\phi \in C_{0,m}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$

und $0 < h \leq \min_{i=1, \dots, n} \{(\xi_i - x_i), (x_i - \xi_{i-1})\}$. Mit den charakteristi-

schen Funktionen $\chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}$ der Intervalle $[\xi_{i-1}, \xi_i]$,

$i=1, \dots, n$, definieren wir $p := \sum_{i=1}^n p_i \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}$ und bilden

$F := \phi_h * p$. Dann gilt:

(i) $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

(ii) $F^{(j)}(x_i) = ((\phi_h)^{(j)} * p)(x_i)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot a_{lk} \cdot (\phi_h)^{(j)} * \\ &\quad * \{ (x - x_l)^k \cdot \chi_{[\xi_{l-1}, \xi_l]}(x) \}_{x=x_i} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot a_{ik} \cdot \{ (\phi_h)^{(j)} * (x - x_i)^k \}_{x=x_i} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot a_{ik} \cdot \frac{d^j}{dx^j} (x - x_i)^k \Big|_{x=x_i} \\ &= a_{ij}, \quad i=1, \dots, n \text{ und } j=0, \dots, m, \end{aligned}$$

nach Satz 5.1(ii). $\diamond$

Das gemäß dieses Satzes für festes

$h \in (0, \min_{i=1, \dots, n} \{(\xi_i - x_i), (x_i - \xi_{i-1})\})$ konstruierte F ist

eindeutig bestimmt. Wie Satz 4.3 gezeigt hat, sind solche Funktionen beweistechnisch oft recht interessant.

Seien nun $\|\pi\| := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$, $\Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$,

$f \in C^{m+1}(I)$ und $A := \{f^{(j)}(x_i) \mid i=1, \dots, n \text{ und } j=0, \dots, m\}$.

Wie oben ausgeführt, gilt

$f^{(j)}(x_i) = p^{(j)}(x_i) = ((\phi_h)^{(j)} * p)(x_i)$, $i=1, \dots, n$ und $j=0, \dots, m$.

Für $x \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ können wir nach dem Taylorschen Satz

$$f(x) - p(x) = f(x) - p_i(x) = \frac{1}{m!} \cdot \int_{x_i}^x (x-t)^m \cdot f^{(m+1)}(t) dt$$

schreiben, d.h. mit $k \in \{i-1, i\}$:

$$\begin{aligned} |(f-p)^{(j)}(x)| &\leq \frac{1}{m!} \cdot \|f^{(m+1)}\|_{\infty, [\xi_{i-1}, \xi_i]} \times \\ &\quad \times \int_{x_i}^{\xi_k} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} (x-t)^m_{+,-} \right| dt. \end{aligned}$$

Also gilt für $i=1, \dots, n$ und $j=0, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \|(f-p)^{(j)}\|_{\infty, [\xi_{i-1}, \xi_i]} &\leq \frac{1}{m!} \cdot \|f^{(m+1)}\|_{\infty, [\xi_{i-1}, \xi_i]} \times \\ &\quad \times \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} \int_{x_i}^{\xi_k} \frac{m!}{(m-j)!} \cdot |(x-t)^{m-j}_{+,-}| dt \\ &= \frac{1}{(m+1-j)!} \cdot \|f^{(m+1)}\|_{\infty, [\xi_{i-1}, \xi_i]} \cdot |\xi_k - x_i|^{m+1-j}, \end{aligned}$$

woraus durch Maximumbildung für $j=0, \dots, m$

$$\|D^j(f-p)\|_{\infty, I} \leq \frac{1}{(m+1-j)!} \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}$$

folgt. Die entsprechende Aussage für die Regularisierungen von p halten wir fest im

Satz 6.4: Sei $f \in C^{m+1}(I)$, $m \in \mathbb{N}$, und ϕ ein gerader Kern aus $C_{0,m}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Für alle $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ bzw. alle $h = \alpha \cdot \Delta$ gibt es dann von α, β, m, j und ϕ abhängige Konstanten

$K(\alpha, \beta, m, j, \phi)$, derart daß

$$\begin{aligned} \|D^j(f - \phi_h * p)\|_{\infty, I} &\leq K(\alpha, \beta, m, j, \phi) \cdot \|\pi\|^{m+1-j} \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}, \\ &j=0, \dots, m. \end{aligned}$$

Beweis: Mit Hilfe der obigen Abschätzungen für

$$\|D^j(f-p)\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, m,$$

liefert Satz 5.4(ii) die Existenz einer von α, β, m und ϕ abhängigen Konstanten C_2

mit $\|D^{m+1}\phi_h * p\|_{\infty, I} \leq C_2 \cdot \|D^{m+1}f\|_{\infty, I}$. Nach Satz 6.3 ist

p auch die Interpolierende der Funktion $\phi_h * p$. Durch einen

ähnlichen Schluß wie im Beweis des Satzes 6.2 folgt damit die Behauptung. $\diamond$

Für regularisierte Hermite-Splines ungeraden Grades erhalten wir die folgende Fehlerabschätzung.

Satz 6.5: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $s \in \Pi_{2m+1} \{ \pi \} \wedge C^m(I)$ der nach NATANSON [14] eindeutig bestimmte stückweise Hermite-Spline bzgl. $f \in C^{2m+2}(I)$ und der Partition $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, von $I = [a, b]$, d.h. es gilt

$$s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i=0, \dots, n+1 \text{ und } j=0, \dots, m.$$

Weiterhin seien $\beta := \|\pi\|/\Delta$, $h := \alpha \cdot \Delta$ mit $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\phi \in C_{0,2m+1}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ und $\omega[\phi_{h/2}]$ der gemäß Satz 2.6 gebildete Kern. Dann gelten

$$(i) \quad \|\mathcal{D}^j(f-s)\|_{\infty, I} \leq \|\pi\|^{2m+2-j} \cdot \|\mathcal{D}^{2m+2}f\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2m+1;$$

$$(ii) \quad (\omega[\phi_{h/2}] * s)^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i=0, \dots, n+1 \text{ und } j=0, \dots, m;$$

$$(iii) \quad \|\mathcal{D}^j(f - \omega[\phi_{h/2}] * s)\|_{\infty, I} \leq K(\alpha, \beta, m, \phi) \cdot \|\pi\|^{2m+2-j} \times \|\mathcal{D}^{2m+2}f\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, 2m+1,$$

mit von α, β, m und ϕ abhängigen Konstanten $K(\alpha, \beta, m, \phi)$.

Beweis: Nach Lemma 6.1 gilt die Abschätzung

$$\|\mathcal{D}^j(f-s)\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]} \leq (x_{i+1} - x_i)^{2m+2-j} \cdot \|\mathcal{D}^{2m+2}f\|_{\infty, I}$$

für $i=0, \dots, n$ und $j=0, \dots, 2m+1$, woraus sich (i) durch Maximumbildung ergibt. Setzen wir s auf $\mathbb{R}$ durch die Teilpolynome $s|_{[x_0, x_1]}$ bzw. $s|_{[x_n, x_{n+1}]}$ fort, so gilt (ii) wegen $s \in C^m(\mathbb{R})$ nach Satz 5.1(iv). In Verbindung mit (i) liefert nun Satz 5.4(ii) die Beziehung

$$\| D^{2m+2} \omega [\phi_{h/2}] * s \|_{\infty, I} \leq C_2 \cdot \| D^{2m+2} f \|_{\infty, I} ,$$

wobei die Konstante C_2 von α, β, m und ϕ abhängt. Die Behauptung (iii) folgt wie im Beweis des Satzes 6.2 mit $K:=1+C_2$. $\diamond$

Während die einzelnen Interpolationsdaten die oben konstruierten Hermite-Interpolationsfunktionen nur lokal beeinflussen, werden wir nun ein Hermite-Interpolationsverfahren betrachten, das einmal stetig differenzierbare stückweise polynomiale Funktionen liefert, die darüberhinaus global von den Interpolationsdaten abhängen. Ein Spezialfall dieses Verfahrens ist die quadratische Spline-Interpolation.

Satz 6.6: Gegeben seien die Partition $\pi: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}=b$ von $I=[a,b]$ sowie die Daten η_0, η_{n+1} und $y_i^{(j)}$, $j=0, \dots, m$ und $i=0, \dots, n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $s \in \Pi_{m+2}(\pi) \cap C^1(I)$ mit

$$s(x_0) = \eta_0, \quad s(x_{n+1}) = \eta_{n+1} \quad \text{und} \quad s^{(j)}(x_{i+1/2}) = y_i^{(j)},$$

$$j=0, \dots, m, \quad i=0, \dots, n.$$

Beweis: Mit $h_i := x_{i+1} - x_i$ definieren wir für $i=0, \dots, n$ durch

$$q_{1,i}(x) = -\frac{(-2)}{h_i^{m+2}} \cdot (x-x_{i+1/2})^{m+1} \cdot (x-x_{i+1}) ,$$

$$q_{2,i}(x) = \frac{2}{h_i^{m+1}} \cdot (x-x_i) \cdot (x-x_{i+1/2})^{m+1} ,$$

$$r_i(x) = \sum_{v=0}^m \frac{1}{v!} \cdot y_i^{(v)} \cdot (x-x_{i+1/2})^v \quad \text{und}$$

$$p_i(x) = r_i(x) + \frac{2}{h_i^{m+1}} \cdot \{ (-1)^m \cdot r_i(x_i) - r_i(x_{i+1}) \} \cdot (x-x_{i+1/2})^{m+1} +$$

$$+ \frac{2}{h_i^{m+2}} \cdot \{ (-1)^{m+1} \cdot r_i(x_i) - r_i(x_{i+1}) \} \cdot (x-x_{i+1/2})^{m+2}$$

die Funktionen $q_{1,i}$, $q_{2,i}$, r_i und p_i . Wie man leicht verifiziert, gilt:

$$q_{1,i}(x_i)=1, \quad q_{1,i}(x_{i+1})=0, \quad q'_{1,i}(x_i)=-\frac{2m+3}{h_i}, \quad q'_{1,i}(x_{i+1})=\frac{(-1)^m}{h_i};$$

$$q_{2,i}(x_i)=0, \quad q_{2,i}(x_{i+1})=1, \quad q'_{2,i}(x_i)=-\frac{(-1)^m}{h_i}, \quad q'_{2,i}(x_{i+1})=\frac{2m+3}{h_i};$$

$$p_i(x_i)=p_i(x_{i+1})=0,$$

$$p'_i(x_i)=r'_i(x_i)+\frac{1}{h_i} \cdot \{ (2m+3) \cdot r_i(x_i) + (-1)^m \cdot r_i(x_{i+1}) \},$$

$$p'_i(x_{i+1})=r'_i(x_{i+1})-\frac{1}{h_i} \cdot \{ (-1)^m \cdot r_i(x_i) + (2m+3) \cdot r_i(x_{i+1}) \}.$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]}(x) = p_i(x) + s_i \cdot q_{1,i}(x) + s_{i+1} \cdot q_{2,i}(x), \quad i=0, \dots, n,$$

aus der sofort $s \in C(I)$ folgt. Die Forderung $s \in C^1(I)$ ist äquivalent mit $s'(x_i-0) = s'(x_i+0)$, $i=1, \dots, n$, d.h.

$$s'(x_i-0) = p'_{i-1}(x_i) + \frac{(-1)^m}{h_{i-1}} \cdot s_{i-1} + \frac{2m+3}{h_{i-1}} \cdot s_i =$$

$$s'(x_i+0) = p'_i(x_i) - \frac{2m+3}{h_i} \cdot s_i - \frac{(-1)^m}{h_i} \cdot s_{i+1}.$$

Mit $s_0 = \eta_0$ und $s_{n+1} = \eta_{n+1}$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\frac{(-1)^m}{h_{i-1}} \cdot s_{i-1} + \left\{ \frac{2m+3}{h_{i-1}} + \frac{2m+3}{h_i} \right\} \cdot s_i + \frac{(-1)^m}{h_i} \cdot s_{i+1} = p'_i(x_i) - p'_{i-1}(x_i),$$

$i=1, \dots, n.$

Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Systems ist wegen

$$\left| \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right)}{(2m+3) \cdot \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right)} \right| = \frac{1}{2m+3} \leq \frac{1}{3} < 1 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

diagonaldominant, woraus sofort die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion s folgt. Nachrechnen unter Verwendung der expliziten Darstellung von s liefert schließlich das

Erfülltsein der Interpolationsbedingungen. $\diamond$

Zur Abschätzung des Approximationsfehlers dieses Interpolationsverfahrens beweisen wir jetzt eine Reihe von Hilfs-sätzen.

Die nach Satz 6.6 bzgl. $f \in C^{m+3}(I)$ und π eindeutig bestimmte Funktion $s \in \Pi_{m+2}(\pi) \cap C^1(I)$ mit $s(x_0) = f(x_0)$, $s(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$ und $s^{(j)}(x_{i+1/2}) = f^{(j)}(x_{i+1/2})$, $j=0, \dots, m$, $i=0, \dots, n$, hat die Darstellung

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} = p_i + s_i \cdot q_{1,i} + s_{i+1} \cdot q_{2,i}, \quad i=0, \dots, n.$$

Wir definieren die entsprechende stückweise Hermite-Interpolierende $l \in C(I)$ von f durch

$$l|_{[x_i, x_{i+1}]} := p_i + f_i \cdot q_{1,i} + f_{i+1} \cdot q_{2,i}, \quad i=0, \dots, n,$$

wobei $f_i = f(x_i)$, $i=0, \dots, n+1$, seien. Auf Grund der Definition der Basisfunktionen in Satz 6.6 gilt

$$l(x_i) = f(x_i), \quad i=0, \dots, n+1, \quad \text{und}$$

$$l^{(j)}(x_{i+1/2}) = f^{(j)}(x_{i+1/2}), \quad j=0, \dots, m, \quad i=0, \dots, n.$$

Lemma 6.7: Mit nur von m und j abhängigen Konstanten α_j gilt

$$\|D^j(f-l)\|_{\infty, I} \leq \alpha_j \cdot \|\pi\|^{m+3-j} \cdot \|D^{m+3}f\|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, m+2.$$

Für $m=0$ gilt insbesondere $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{216}$, $\alpha_1 = \frac{1}{12}$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Beweis: Nach Lemma 6.1 haben wir für $j=0, \dots, m+2$ und

$$i=0, \dots, n:$$

$$\|D^j(f-l)\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]} \leq (x_{i+1} - x_i)^{m+3-j} \cdot \|D^{m+3}f\|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]}.$$

Mit $\alpha_j = 1$ für $j=0, \dots, m+2$ folgt daraus durch Maximumbildung die Behauptung für $m \in \mathbb{N}$. Durch Bestimmung der Extrema des Knotenpolynoms ω in der Fehlerformel

$(f-1)(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi) \cdot \omega(x)$ für alle $x \in [x_i, x_{i+1}]$ und ein von x abhängiges $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ erhält man im Falle $m=0$ das angegebene α_0 . Da die Fehlerfunktion $D^j(f-1)$ für alle $f \in \Pi_3$ verschwindet, kann man zur Fehlerabschätzung auch das Peano-Kern-Theorem anwenden. Ist P der Projektor, der die Funktionen f auf die Interpolierenden l abbildet, so gilt

$$D^j(f-1)(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^j}{\partial x^j} (\text{Id}-P)_{(x)}(x-t)_+^2 \cdot f'''(t) dt,$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0, \dots, n$ und $j=0, 1, 2$.

Daraus ergibt sich nach einigen Umformungen für $j=0, 1, 2$:

$$\| D^j(f-1) \|_{\infty, I} \leq \| \pi \|^{3-j} \cdot \| D^3 f \|_{\infty, I} \times \\ \times \int_0^1 \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left\{ \frac{1}{2} (x-t)_+^2 + 2x(x-1) \left(\frac{1}{2}-t \right)_+^2 x \left(x-\frac{1}{2} \right) (1-t)^2 \right\} \right| dt,$$

$x \in [0, 1]$. Die Behauptung folgt jetzt durch Bestimmung der Extrema des Integralterms. $\diamond$

Lemma 6.8: Mit nur von m und j abhängigen Konstanten γ_j gilt

$$\| |D^j q_{1,i}| + |D^j q_{2,i}| \|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]} \leq \gamma_j \cdot (x_{i+1} - x_i)^{-j}, \\ j=0, \dots, m+2, \quad i=0, \dots, n.$$

Für $m=0$ gilt insbesondere $\gamma_0=1$, $\gamma_1=4$ und $\gamma_2=8$.

Beweis: Durch geeignete Verschiebungen des Koordinatenursprungs lassen sich die Normbestimmungen der Funktionen $q_{1,i}$, $q_{2,i}$ und ihrer Ableitungen auf die Diskussion des Polynoms $p(x) := u \cdot x^k \cdot (x-v)$ mit $k \geq 1$ und $u, v \in \mathbb{R}$ zurückführen. Durch vollständige Induktion beweist man die Beziehungen

$$p^{(v)}(x) = u \cdot x^{k-v} \cdot \left\{ \frac{(k+1)!}{(k+1-v)!} \cdot x - \frac{k!}{(k-v)!} \cdot v \right\}, \quad v=0, \dots, k.$$

Daraus folgt $\| p^{(k+2)} \|_{\infty} = 0$, $\| p^{(k+1)} \|_{\infty} = |u| \cdot (k+1)!$

und durch elementare Berechnungen

$$\| p^{(v)} \|_{\infty} = |u| \cdot \frac{(2k+2-v) \cdot k!}{(k+1-v)!} \cdot |v|^{k+1-v}, \quad v=0, \dots, k,$$

wobei $\| \cdot \|_{\infty}$ bzgl. $[-|v|, |v|]$ gebildet wurde. Um die Formeln

auf $q_i \in \{q_{1,i}, q_{2,i}\}$, $i=0, \dots, n$, anwenden zu können, ist

$k:=m+1$ und $v:=\pm \frac{1}{2}h_i$ mit $h_i := x_{i+1} - x_i$ zu setzen. Damit gilt

$$\| q_i^{(m+3)} \|_{\infty} = 0, \quad \| q_i^{(m+2)} \|_{\infty} = (m+2)! \cdot 2^{m+1} \cdot h_i^{-(m+2)}$$

und für $v=0, \dots, m+2$:

$$\begin{aligned} \| q_i^{(v)} \|_{\infty} &= \frac{2^{m+1}}{h_i^{m+2}} \cdot \frac{(2m+4-v) \cdot (m+1)!}{(m+2-v)!} \cdot \left(\frac{h_i}{2}\right)^{m+2-v} \\ &= 2^{v-1} \cdot \frac{(2m+4-v) \cdot (m+1)!}{(m+2-v)!} \cdot h_i^{-v}. \end{aligned}$$

Für $j=0, \dots, m+2$ und $i=0, \dots, n$ folgt also

$$\| |D^j q_{1,i}| + |D^j q_{2,i}| \|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]} \leq 2^j \cdot \frac{(2m+4-j) \cdot (m+1)!}{(m+2-j)!} \cdot h_i^{-j}.$$

Im Falle $m=0$ sind $q_{1,i}$ und $q_{2,i}$ quadratische Polynome.

Die Behauptung folgt hier durch Bestimmung der Extrema von

$$|D^j q_{1,i}| + |D^j q_{2,i}|, \quad j=0, 1, 2, \text{ auf } [x_i, x_{i+1}], \quad i=0, \dots, n. \quad \diamond$$

Lemma 6.9: Die Vektoren $F := (f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ und

$S := (s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ seien durch die Funktionswerte von

f und s an den Punkten der Partition π definiert. Dann

gibt es eine von β und m abhängige Konstante κ mit

$$\| F - S \|_{\infty} \leq \kappa \cdot \| \pi \|^{m+3} \cdot \| D^{m+3} f \|_{\infty, I}.$$

Für $m=0$ gilt insbesondere $\kappa = \frac{1}{24}$.

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 6.6 ist $s \in C^1(I)$ äquivalent

mit dem Verschwinden der durch

$$\begin{aligned} g_i(s) := & (-1)^m \cdot h_i \cdot s_{i-1} + (2m+3) \cdot (h_i + h_{i-1}) \cdot s_i + (-1)^m \cdot h_{i-1} \cdot s_{i+1} - \\ & - h_i \cdot h_{i-1} \cdot (p'_i(x_i) - p'_{i-1}(x_i)) \quad , \quad i=1, \dots, n, \end{aligned}$$

definierten linearen Funktionale g_i . Da die g_i alle Elemente aus Π_{m+2} auf die Null abbilden, lassen sie sich nach dem Kern-Theorem von Peano darstellen als

$$g_i(\psi) = \frac{1}{(m+2)!} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi^{(m+3)}(t) \cdot g_i(x) (x-t)_+^{m+2} dt,$$

$\psi \in C^{m+3}(I)$, $i=1, \dots, n$. Daraus folgt

$$|g_i(\psi)| \leq \frac{1}{(m+2)!} \cdot \|\psi^{(m+3)}\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1}]} \times \\ \times \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_i(x) (x-t)_+^{m+2}| dt.$$

Direkte Berechnung liefert durch wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_i(x) (x-t)_+^{m+2}| dt \leq c(m) \cdot h^{m+4}$$

mit $h := \max(h_{i-1}, h_i)$ und einer nur von m abhängigen Konstanten $c(m)$. Im Fall $m=0$ läßt sich sogar

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_i(x) (x-t)_+^2| dt = \frac{1}{6} (h_{i-1} \cdot h_i^3 + h_{i-1}^3 \cdot h_i)$$

zeigen. Zusammenfassend gilt für $i=1, \dots, n$:

$$|g_i(f)| \leq \frac{c(m)}{(m+2)!} \cdot \|\pi\|^{m+4} \cdot \|D^{m+3}f\|_{\infty, I}.$$

Seien nun die Matrix $B=(b_{ij})$ definiert durch

$$b_{ij} := \begin{cases} (2m+3) \cdot (h_i + h_{i-1}) & , 1 \leq j=i \leq n \\ (-1)^m \cdot h_i & , 1 \leq j=i-1 \leq n-1 \\ (-1)^m \cdot h_{i-1} & , 2 \leq j=i+1 \leq n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und die Vektoren e, g durch $e := (s_i - f_i; i=1, \dots, n)$ und $g := (g_i(f); i=1, \dots, n)$, so gilt $Be = -g$, wie man durch

Einsetzen und Vergleich mit dem Beweis von Satz 6.6 leicht verifiziert. Wir multiplizieren beide Seiten der letzten Gleichung mit der Diagonalmatrix $D=(d_{ij})$ mit

$d_{ii} := \frac{1}{2m+3} \cdot (h_i + h_{i-1})^{-1}$, $i=1, \dots, n$. Sei E die Einheitsmatrix, so gilt $DBe = (E+M)e = -Dg$. Für die Norm der Matrix M erhalten wir nun

$$\|M\|_{\infty} = \|(m_{ij})\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \frac{1}{2m+3}.$$

Nach ISAACSON-KELLER [11] folgt

$$\|(DB)^{-1}\|_{\infty} = \|(E+M)^{-1}\|_{\infty} \leq (1 - \frac{1}{2m+3})^{-1} = \frac{2m+3}{2m+2} \quad \text{und}$$

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{2m+3}{2m+2} \cdot \|Dg\|_{\infty}. \quad \text{Weiterhin haben wir}$$

$$|d_{ii} g_i| = d_{ii} \cdot |g_i| \leq \frac{c(m) \cdot \|\pi\|^{m+4}}{(m+2)! \cdot (2m+3) \cdot (h_i + h_{i-1})} \cdot \|D^{m+3} f\|_{\infty, I}$$

$$\leq \frac{c(m) \cdot \beta \cdot \|\pi\|^{m+3}}{2 \cdot (2m+3) \cdot (m+2)!} \cdot \|D^{m+3} f\|_{\infty, I} \quad \text{und damit}$$

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{2m+3}{2m+2} \cdot \frac{\beta \cdot c(m)}{2 \cdot (2m+3) \cdot (m+2)!} \cdot \|\pi\|^{m+3} \cdot \|D^{m+3} f\|_{\infty, I} =$$

$$\kappa(m, \beta) \cdot \|\pi\|^{m+3} \cdot \|D^{m+3} f\|_{\infty, I}.$$

Für $m=0$ erhalten wir

$$|d_{ii} g_i| \leq \frac{1}{36} \cdot (\max(h_{i-1}, h_i))^3 \cdot \|D^3 f\|_{\infty, I} \quad \text{und damit } \kappa = \frac{1}{24}.$$

Wegen $f_0 = s_0$ und $f_{n+1} = s_{n+1}$ gilt die Behauptung. $\diamond$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir schließlich zum

Satz 6.10: Sei $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition von $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $\pi' := \{x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \mid i=0, \dots, n\}$ und $\beta := \|\pi\|/\Delta$ sowie $f \in C^{m+3}(I)$, $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren von β , m und j abhängige Konstanten ϵ_j , so daß für die nach Satz 6.6 zu f eindeutig bestimmte Hermite-Interpolierende $s \in \Pi_{m+2}\{\pi\} \cap C^1(I)$ gilt

$$\| D^j (f-s) \|_{\infty, I} \leq \epsilon_j \cdot \| \pi \|^{m+3-j} \cdot \| D^{m+3} f \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, m+2.$$

Für $m=0$ gilt insbesondere

$$\epsilon_0 = \frac{9+\sqrt{3}}{216}, \quad \epsilon_1 = \frac{2\beta+1}{12} \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \frac{2\beta^2+3}{6}.$$

Beweis: Sei $x \in I$, dann gibt es ein $i \in \{0, \dots, n\}$ mit

$x \in [x_i, x_{i+1}]$. Es gilt

$$|D^j (f-s)(x)| \leq |D^j (f-l)(x)| + |D^j (l-s)(x)| \quad \text{und}$$

$$D^j (l-s)(x) = p_i^{(j)}(x) + f_i \cdot q_{1,i}^{(j)}(x) + f_{i+1} \cdot q_{2,i}^{(j)}(x) - \\ - p_i^{(j)}(x) - s_i \cdot q_{1,i}^{(j)}(x) - s_{i+1} \cdot q_{2,i}^{(j)}(x), \quad \text{d.h.}$$

$$|D^j (l-s)(x)| = |(f_i - s_i) \cdot q_{1,i}^{(j)}(x) + (f_{i+1} - s_{i+1}) \cdot q_{2,i}^{(j)}(x)|$$

$$\leq \|F-S\|_{\infty} \cdot (|D^j q_{1,i}| + |D^j q_{2,i}|) \| \cdot \|_{\infty, [x_i, x_{i+1}]}$$

Aus den Lemmata 6.7, 6.8 und 6.9 folgt nun

$$\| D^j (f-s) \|_{\infty, I} \leq \| D^j (f-l) \|_{\infty, I} + \| F-S \|_{\infty} \times \\ \times (|D^j q_1| + |D^j q_2|) \| \cdot \|_{\infty, [0, \Delta]} \\ \leq (\alpha_j(m, j) + \kappa(\beta, m) \cdot \gamma(m, j) \cdot \beta^j) \cdot \| \pi \|^{m+3-j} \cdot \| D^{m+3} f \|_{\infty, I}$$

für $j=0, \dots, m+2$, d.h. die Behauptung. $\diamond$

Für die Regularisierungen der oben definierten Funktionen

s beweisen wir jetzt den

Satz 6.11: Sei s die nach Satz 6.6 zu $f \in C^{m+3}(I)$, $m \in \mathbb{N}$, bzgl.

der Partition π eindeutig bestimmte Hermite-Interpolierende

aus $\Pi_{m+2}(\pi) \cap C^1(I)$ und ϕ ein gerader Kern aus $C_{0, m+2}^{\infty}(\mathbb{R})$

mit $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Dann gilt für alle $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ bzw. für alle

$h := \alpha \cdot \Delta$:

$$(i) \quad (\phi_h * s)^{(j)}(x_{i+1/2}) = f^{(j)}(x_{i+1/2}), \quad j=0, \dots, m \quad \text{und} \quad i=0, \dots, n;$$

$$(ii) \quad \| D^j (f - \phi_h * s) \|_{\infty, I} \leq K(\alpha, \beta, m, j, \phi) \cdot \| \pi \|^{m+3-j} \times \\ \times \| D^{m+3} f \|_{\infty, I}, \quad j=0, \dots, m+2,$$

mit von α, β, m, j und ϕ abhängigen Konstanten $K(\alpha, \beta, m, j, \phi)$.

Beweis: Die Aussage (i) folgt sofort aus Satz 5.1(ii).

ad (ii): Nach Satz 6.10 haben wir Abschätzungen für $\|D^j(f-s)\|_{\infty, I}$. Da die Konstanten ε_j von $\|\pi\|$ und f unabhängig sind, liefert Satz 5.4(ii) wegen $s \in \Pi_{m+2}\{\pi\} \cap C^1(I)$ die Ungleichung $\|D^{m+3}\phi_h * s\|_{\infty, I} \leq C_2 \cdot \|D^{m+3}f\|_{\infty, I}$, wobei die Konstante C_2 von α, β, m und ϕ abhängt. Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 6.2 und $K := \varepsilon_j \cdot (1+C_2)$ folgt die Behauptung. $\diamond$

Die Regularisierung stückweise polynomialer Funktionen läßt sich - wie wir nun zum Abschluß dieses Paragraphen sehen werden - auch dazu verwenden, unendlich oft differenzierbare Funktionen anzugeben, die Hermite-Birkhoff-Daten interpolieren.

Wir definieren zuerst die Aufgabenstellung.

Gegeben seien die Partition $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, von $I = [a, b]$ mit

$$\|\pi\| := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i), \quad \Delta := \min_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i),$$

$\beta := \|\pi\| / \Delta$ und $m, p \geq 1$. Die Menge $\Lambda := \{\lambda_l \mid l=1, \dots, p\}$ erzeugt ein H-B-Interpolationsproblem, wenn es für jedes $\lambda_l \in \Lambda$

ein Tupel (x_l, j_l) , $x_l \in \mathbb{R}$ und $0 \leq j_l \leq m-1$, gibt mit

$$\lambda_l f = D_{x_l}^{j_l} f := (D^{j_l} f)(x_l), \quad f \in C^{m-1}(I) \text{ und } l \in \{1, \dots, p\}.$$

Dabei seien die Elemente von Λ linear unabhängig. Das H-B-Problem läßt sich auch durch die $m \times (n+2)$ - "Inzidenzmatrix" $E = (e_{ji})_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ 0 \leq i \leq n+1}}$ mit $e_{ji} \in \{0, 1\}$ definieren.

Genau dann existiert ein $\lambda_l \in \Lambda$, dem das Tupel (x_l, j)

zugeordnet ist, wenn $e_{ji}=1$ ist.

Es gibt Spline-Funktionen $(2m-1)$ -ten Grades, die solche Interpolationsbedingungen erfüllen: die sogenannten g-Splines. Einige ihrer Eigenschaften fassen wir zusammen im

Satz 6.12: $\Lambda := \{\lambda_l \mid l=1, \dots, p\}$ erzeuge ein H-B-Problem und für die zugehörige Inzidenzmatrix E gelte

$$\sum_{j=0}^{m-1} e_{ji} \geq 1, \quad i=1, \dots, n, \quad \text{sowie} \quad e_{ji}=1, \quad j=0, \dots, m-1, \quad i=0, n+1.$$

Dann gilt für $f \in C^{m-1}(I)$ (AHLBERG-NILSON [1]):

- (i) es gibt genau ein $s \in \Pi_{2m-1}(\pi) \cap C^{m-1}(\mathbb{R})$ mit
 $\lambda_l s = \lambda_l f, \quad l=1, \dots, p,$ und $D^m s(x) = 0$ für $x \notin I$;
- (ii) $D^{2m-j-1}(s(x_i+0) - s(x_i-0)) = 0$ für $D_{x_i}^j \notin \Lambda$ mit
 $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{0, \dots, m-1\}$, sowie s ist in x_i
 $(2m-2-v_i)$ -mal stetig differenzierbar, wenn v_i ,
 $0 \leq v_i \leq m-1$, die Ordnung der höchsten im Punkte x_i
 vorgeschriebenen Ableitung ist, $i=0, \dots, n+1$.

Sei nun $f \in W_2^{(2m)}(I)$ und $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von I mit jeweils $n_i, i \in \mathbb{N}$, Punkten und $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\pi_i\| = 0$.

Zu jedem π_i gehöre eine Inzidenzmatrix $E^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, die den oben aufgeführten Bedingungen genüge. Weiterhin gebe es ein $c > 0$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n_i+1\}$ ein $j(i, k)$ existiert mit $e_{o, j}^{(i)} = 1$ und $|x_k^{(i)} - x_j^{(i)}| \leq c \cdot \|\pi_i\|$.
 Dann gilt folgende Fehlerabschätzung (SCHULTZ-VARGA [18]):

- (iii) es existiert eine von f , $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(E^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige Konstante M , so daß für jedes nach (i) zu π_i und $E^{(i)}$ eindeutig bestimmte s_i folgt

$$\| D^j (f-s_i) \|_{2,I} \leq M \cdot \| \pi_i \|^{2m-j} \cdot \| D^{2m} f \|_{2,I}, \\ j=0, \dots, m, i \in \mathbb{N}.$$

In den bisher bekannten Abschätzungen für den Fehler $D^j(f-s)$ in der Čebyšev-Norm tritt $\| \pi \|$ nur in der $(2m-\frac{1}{2}-j)$ -ten Potenz auf. Auf diese wurde hier verzichtet, da die Konvergenzordnungen für die Anwendung von Satz 5.4 (ii) bei der Fehlerabschätzung für Regularisierungen von s nicht ausreichen. Der g -Spline s erfüllt i.a. mehr Interpolationsbedingungen als ein einfacher Spline. Das wurde, wie Satz 6.12(ii) zeigt, durch einen Verlust an Differenzierbarkeit erkauft. Durch Konvolution von s mit einem gemäß Satz 2.6 konstruierten Kern kann dieser Mangel jedoch behoben werden. Um im folgenden Beweis den Satz 5.4 anwenden zu können, werden wir die Menge der zugelassenen H-B-Probleme etwas einschränken.

Satz 6.13: Sei $f \in W_2^{(2m)}(I)$ und $\Lambda := \{\lambda_l \mid l=1, \dots, p\}$ ein H-B-Problem mit $e_{ji}=1$ für $i=0,1,n,n+1$ und $j=0, \dots, m-1$ in der entsprechenden Inzidenzmatrix E . Der gerade Kern ϕ mit $\text{supp } \phi = [-1,1]$ sei aus $C_{0,2m-1}^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt für den g -Spline s bzgl. f und Λ nach Satz 6.12 und für alle $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ bzw. $h := \alpha \cdot \Delta$

- (i) $\lambda_1(\omega[\phi_h] * s) = \lambda_1 f, \quad l=1, \dots, p;$
- (ii) es existieren von α, β, m, j und ϕ abhängige Konstanten $K(\alpha, \beta, m, j, \phi)$, derart daß für $j=0, \dots, m$ gilt:

$$\| D^j (f - \omega[\phi_h] * s) \|_{2, [x_1, x_n]} \leq K(\alpha, \beta, m, j, \phi) \times \\ \times \| \pi \|^{2m-j} \cdot \| D^{2m} f \|_{2,I}.$$

Beweis:

ad (i): Durch Polynome aus Π_{m-1} wird s gemäß Satz 6.12(i) auf $(-\infty, a)$ und $(b, +\infty)$ fortgesetzt. Wegen $s \in \Pi_{2m-1} \{ \pi \} \cap C^{m-1}(\mathbb{R})$ folgt aus Satz 5.1(iv) die Behauptung.

ad (ii): Bilden wir $\Lambda' := \Lambda \setminus \{ D_{x_i}^j \mid i=0, n+1 \text{ und } j=0, \dots, m-1 \}$, so gilt für den g -Spline s' bzgl. f und Λ' und $x \in [x_1, x_n]$: $s'(x) = s(x)$, da s, s' und die Teilpolynome

$s|_{[a, x_1]}$ bzw. $s|_{[x_n, b]}$ lokal durch die Hermite-Interpolationsbedingungen in x_0, x_1, x_n und x_{n+1} eindeutig bestimmt sind.

Wegen (i) ist s' auch der g -Spline bzgl. $\omega[\phi_h] * s$ und Λ' .

Damit gilt für $j=0, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \| D^j (f - \omega[\phi_h] * s) \|_{2, [x_1, x_n]} &\leq \| D^j (f - s') \|_{2, [x_1, x_n]} + \\ &+ \| D^j (s' - \omega[\phi_h] * s) \|_{2, [x_1, x_n]} \\ &\leq M \cdot \| \pi \|^{2m-j} \cdot (\| D^{2m} f \|_{2, [x_1, x_n]} + \| D^{2m} \omega[\phi_h] * s \|_{2, [x_1, x_n]}) \end{aligned}$$

nach Satz 6.12(iii), da Λ und Λ' die Voraussetzungen von Satz 6.12 erfüllen. Wegen $h = (\alpha/\beta) \cdot \| \pi \|$ mit $\alpha/\beta > 0$,

$f \in W_2^{(2m)}(I)$ und $s \in L^2(I)$ können wir Satz 5.4(i) anwenden.

Mit der von f und $\| \pi \|$ unabhängigen Konstanten M gilt

nach Satz 6.12(iii) die Abschätzung

$$\| f - s \|_{2, I} \leq M \cdot \| \pi \|^{2m} \cdot \| D^{2m} f \|_{2, I}.$$

Durch Vergrößerung der Abschätzungen im Beweis von Satz

5.4(i) erhalten wir die Existenz einer von $M, \alpha/\beta, 2m$ und

ϕ abhängigen Konstanten C_1 , so daß

$$\| D^{2m} \omega[\phi_h] * s \|_{2, [x_1, x_n]} \leq C_1 \cdot \| D^{2m} f \|_{2, I} \quad \text{gilt.}$$

Setzen wir diese Beziehung in die obige Abschätzung ein,
so erhalten wir

$$\| D^j (f - \omega[\phi_h] * s) \|_{2, [x_1, x_n]} \leq M \cdot \| \pi \|^{2m-j} \cdot (1+C_1) \cdot \| D^{2m} f \|_{2, I},$$

$j=0, \dots, m,$

und mit $K:=M \cdot (1+C_1)$ die Behauptung. $\diamond$

§ 7 Minimaleigenschaften einer Klasse von Splines

geraden Grades

Zum Abschluß wollen wir noch, wie bereits in § 4 angekündigt, eine Klasse von Polynom-Splines geraden Grades untersuchen, die vorgegebene Funktionen jeweils im Inneren der Partitionsteilintervalle interpolieren. Diese Interpolationsstellen können allerdings nicht a priori festgelegt werden.

Mit Hilfe der Theorie der Spline-Systeme werden wir für sie Minimaleigenschaften zeigen, wie sie für die interpolierenden Splines ungeraden Grades seit langem bekannt sind. Wir werden dies nicht direkt tun, sondern ein entsprechendes verallgemeinertes Problem im Rahmen der funktional-analytischen Theorie der Spline-Systeme behandeln.

Dazu erinnern wir an die Definition der Spline-Systeme (vgl. HAUSSMANN-MÜNCH [8]).

Definition 7.1:

(i) Ein Quadrupel (X, P, U, H) heißt Spline-System, falls die folgenden Bedingungen gelten:

(S1) X ist ein reeller oder komplexer Vektorraum und H ein reeller bzw. komplexer Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und der kanonischen Norm $\| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

(S2) $P: X \rightarrow X$ ist eine lineare und idempotente Abbildung.

(S3) $U: X \rightarrow H$ ist eine lineare Abbildung.

- (S4) Mit $P' := \text{Id} - P$ gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\text{Im } UP \perp \text{Im } UP' .$$
- (ii) Ein Spline-System heißt eindeutig, falls
- (S5) $\text{Ker } P \wedge \text{Ker } U = (0)$
gilt, oder äquivalent damit
- (S5') $\text{Ker } U \subset \text{Im } P .$
- (iii) Ein Spline-System wird topologisch genannt, wenn folgendes gilt:
- (S6) X ist ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum und die beiden Abbildungen P und U sind stetig.

Satz 7.2: Gegeben sei ein Spline-System $\Sigma := (X, P, U, H)$, ein Vektorraum Y und eine lineare, surjektive Abbildung $S: X \rightarrow Y$. Sei weiterhin X_S ein Unterraum von X mit $X_S \oplus \text{Ker } S = X$ und $\text{Im } P|_{X_S} \subset X_S$ und $S^{-1}: Y \rightarrow X_S$ die inverse Abbildung von S , so ist $\Sigma_S := (Y, SPS^{-1}, US^{-1}, H)$ ein Spline-System. Ist Σ eindeutig, so auch Σ_S .

Wenn Σ ein topologisches Spline-System, Y ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum und S ein Epimorphismus ist, d.h. sowohl S als auch S^{-1} stetig sind, so ist auch Σ_S ein topologisches Spline-System.

Definition 7.3: Wir nennen $\Sigma_S := (Y, SPS^{-1}, US^{-1}, H)$ das mit S von $\Sigma := (X, P, U, H)$ abgeleitete (eindeutige oder topologische) Spline-System.

Beweis von Satz 7.2: Wir haben die Axiome (S1)-(S4) und (S5) bzw. (S6) der Definition 7.1 nachzuprüfen.

Unter Beachtung von $P(X_S) \subset X_S$ beim Nachweis der Idempotenz von SPS^{-1} ist der Beweis der Gültigkeit von (S1), (S2) und (S3) sowie gegebenenfalls von (S6) trivial.

ad (S4): Seien $y_i \in Y$ und $x_i := S^{-1}y_i \in X_S$, $i=1,2$. Auf Grund der für Σ geltenden Orthogonalitätsrelation und wegen $P(X_S) \subset X_S$ haben wir

$$\begin{aligned} & ((US^{-1})(SPS^{-1})y_1, (US^{-1})(Id_Y - SPS^{-1})y_2) = \\ & (UP(S^{-1}y_1), U(Id_X - P)(S^{-1}y_2)) = (UPx_1, UPx_2) = 0, \end{aligned}$$

wobei Id_X , Id_Y die Identitäten auf X bzw. Y sind.

Also gilt für Σ_S :

$$\text{Im } (US^{-1})(SPS^{-1}) = \text{Im } UPS^{-1} \perp \text{Im } UP'S^{-1} = \text{Im } (US^{-1})(Id_Y - SPS^{-1}).$$

ad (S5): Sei $y \in \text{Ker } US^{-1} \cap \text{Ker } SPS^{-1}$, d.h. für $x := S^{-1}y \in X_S$ gilt $x \in \text{Ker } U \cap \text{Ker } SP$ und damit auch $x \in \text{Ker } SP \cap X_S$. Diese

letzte Beziehung liefert wegen $P(X_S) \subset X_S$ und $X = X_S \oplus \text{Ker } S$ die Gleichung $Px = 0$. Daraus folgt mit Hilfe der Eindeutigkeit von Σ : $x \in \text{Ker } U \cap \text{Ker } P = (0)$, womit die Behauptung $(0) \subset \text{Ker } US^{-1} \cap \text{Ker } SPS^{-1} \subset (0)$ gezeigt ist. $\diamond$

Aus den bekannten, für Spline-Systeme gültigen, Sätzen (vgl. HAUSSMANN-MÜNCH [8]) erhalten wir jetzt sofort die beiden folgenden Korollare.

Korollar 7.4: Sei Σ_S das mit S von Σ abgeleitete Spline-System. Dann gelten für jedes zu $y \in Y$ gehörende Spline-Element s , also insbesondere auch für $s = SPS^{-1}y$, die beiden Minimaleigenschaften

$$(M1) \quad \|US^{-1}s\| \leq \|US^{-1}t\| \quad \text{für alle } t \in y + \text{Ker } SPS^{-1},$$

$$(M2) \quad \|US^{-1}(y-s)\| \leq \|US^{-1}(y-u)\| \quad \text{für alle } u \in \text{Im } SPS^{-1} \oplus (\text{Ker } SPS^{-1} \cap \text{Ker } US^{-1}). \quad \diamond$$

Korollar 7.5: Sei Σ_S das mit S von Σ abgeleitete topologische Spline-System, H ein Hilbert-Raum, U ein Epimorphismus und es gelte $\text{Im } U|_{X_S} = H$. Die starken topologischen Dualräume von Y und H seien Y' und H' und $(SPS^{-1})^T$ und $(US^{-1})^T$ die transponierten Abbildungen von SPS^{-1} bzw. US^{-1} .

Die Abbildungen V und R werden definiert durch

$$V := ((US^{-1})^T)^{-1} : \text{Im } (US^{-1})^T \rightarrow H' \quad \text{und}$$

$$R := (SPS^{-1})^T : \text{Im } (US^{-1})^T \rightarrow Y'.$$

Dann ist $\Sigma'_S := (\text{Im}(US^{-1})^T, R, V, H')$ ein eindeutiges Spline-System, nämlich das duale Spline-System von Σ_S , und für $y' \in \text{Im } (US^{-1})^T$ gelten die beiden dualen Minimaleigenschaften

$$(M1') \quad \|V(Ry')\|_{H'} \leq \|Vz'\|_{H'},$$

$$\text{für alle } z' \in \text{Im } (US^{-1})^T \text{ mit } Ry' = Rz',$$

$$(M2') \quad \|V(y' - Ry')\|_{H'} \leq \|V(y' - z')\|_{H'},$$

$$\text{für alle } z' \in \text{Im } R, \text{ wobei die Gleichheit jeweils}$$

$$\text{nur für } z' = Ry' \text{ gilt.}$$

Beweis: Wegen $US^{-1}(Y) = U(X_S) = H$ ist US^{-1} surjektiv und somit ein Epimorphismus. $\diamond$

Wir kehren nun zur anfangs angegebenen Aufgabenstellung zurück.

Dazu definieren wir die Partition $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, $n \in \mathbb{N}$, des Intervalls $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $k \geq 1$ ist der Raum

$W_2^{(k)}(I)$ nach DE BOOR-LYNCH [4] bzgl. des inneren Produktes

$$(f_1, f_2) := \sum_{i=0}^{k-1} f_1^{(i)}(a) \cdot f_2^{(i)}(a) + \int_a^b (D^k f_1)(y) \cdot (D^k f_2)(y) dy,$$

$$f_1, f_2 \in W_2^{(k)}(I),$$

ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern und dem

stetigen Dual

$$\mathcal{T}^{(k)} := \{F: W_2^{(k)}(I) \rightarrow \mathbb{R} \mid Ff = \sum_{i=0}^{k-1} \int_a^b f^{(i)}(x) d\mu_i(x);$$

$\mu_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion beschränkter Variation,
 $i=0, \dots, k-1\}$.

Der Projektor $P: W_2^{(k)}(I) \rightarrow W_2^{(k)}(I)$ sei für $f \in W_2^{(k)}(I)$ durch
 $f(x_i) = Pf(x_i)$, $i=0, \dots, n+1$, sowie

$$f^{(j)}(x_i) = (Pf)^{(j)}(x_i), \quad i=0, n+1 \text{ und } j=1, \dots, k-1,$$

erklärt, wobei $Pf \in C^{2k-2}(I)$ sei und sich in jedem Teilintervall (x_i, x_{i+1}) , $i=0, \dots, n$, auf ein Polynom $(2k-1)$ -ten Grades reduziere. Das Quadrupel $\Sigma_k := (W_2^{(k)}(I), P, D^k, L^2(I))$ ist nach HAUSSMANN-MÜNCH [8] ein eindeutiges topologisches Spline-System.

Satz 7.6: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für alle $f \in W_2^{(k)}(I)$ gibt es genau ein $s \in \Pi_{2k}(\pi) \cap C^{2k-1}(I)$ mit

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} s(x) dx, \quad i=0, \dots, n, \text{ und}$$

$$f^{(j)}(x_i) = s^{(j)}(x_i), \quad i=0, n+1 \text{ und } j=0, \dots, k-1.$$

Beweis: Wir definieren die Stammfunktion F von f durch

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$. Dann gibt es, wie oben erwähnt, genau einen interpolierenden, Hermite-Randbedingungen erfüllenden, Spline $(2k+1)$ -ten Grades S bzgl. F und π , d.h. es gilt:

$$S(x_i) = F(x_i) = \int_a^{x_i} f(t) dt, \quad i=0, \dots, n+1, \text{ und}$$

$$S^{(j)}(x_i) = F^{(j)}(x_i) = f^{(j-1)}(x_i), \quad i=0, n+1 \text{ und } j=1, \dots, k.$$

Wegen $S \in \Pi_{2k+1}(\pi) \cap C^{2k}(I)$ ist $s := S' \in \Pi_{2k}(\pi) \cap C^{2k-1}(I)$ und besitzt die gewünschten Eigenschaften:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} s(x) dx = S(x_{i+1}) - S(x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

$$= \int_a^{x_{i+1}} f(x) dx - \int_a^{x_i} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad i=0, \dots, n,$$

sowie $s^{(j)}(x_i) = S^{(j+1)}(x_i) = F^{(j+1)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$,
 $i=0, n+1$ und $j=0, \dots, k-1$.

Die Eindeutigkeit von s lässt sich sofort auf die von S zurückführen. $\diamond$

Bemerkung: Nach dem Satz von Rolle existieren Punkte

$\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i=0, \dots, n$, an denen der Spline geraden Grades s die Funktion f interpoliert: $s(\xi_i) = f(\xi_i)$, $i=0, \dots, n$. $\diamond$

Satz 7.7: Gegeben sei das eindeutige topologische Spline-System Σ_{k+1} , $k \in \mathbb{N}$, die Abbildung

$$D: \begin{cases} W_2^{(k+1)}(I) \rightarrow W_2^{(k)}(I) \\ f \rightarrow f' \end{cases},$$

deren Inverse definiert sei durch

$$(D^{-1}f)(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad f \in W_2^{(k)}(I) \text{ und } x \in I.$$

Dann ist $\theta_k := (W_2^{(k)}(I), \text{DPD}^{-1}, D^k, L^2(I))$ das mit D von Σ_{k+1} abgeleitete eindeutige topologische Spline-System. Es gelten demnach die vier Minimaleigenschaften (M1), (M2), (M1') und (M2').

Beweis: Als Hilbertraum ist $W_2^{(k)}$ insbesondere ein Hausdorff-scher lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Die Differenzationsabbildung D ist trivialerweise linear und surjektiv. Sei $f \in W_2^{(k+1)}(I)$, so gilt

$$\|Df\|_k^2 = \sum_{i=0}^{k-1} [(D^{i+1}f)(a)]^2 + \int_a^b [(D^{k+1}f)(x)]^2 dx =$$

$$= \int_{i=1}^k [(D^i f)(a)]^2 + \int_a^b [(D^{k+1} f)(x)]^2 dx \leq \|f\|_{k+1}^2,$$

d.h. D ist stetig. Da auch $D^{k+1}: W_2^{(k+1)}(I) \rightarrow L^2(I)$ surjektiv ist, sind D und D^{k+1} nach dem Homomorphiesatz von Banach Epimorphismen. Wegen

$$\text{Im } P|_{X_S} = P(\{f \in W_2^{(k+1)}(I) \mid f(a)=0\}) = \{s \in \Pi_{2k+1}\{\pi\} \cap C^{2k}(I) \mid s(a)=0\} \\ \subset \{f \in W_2^{(k+1)}(I) \mid f(a)=0\} = X_S$$

ist Θ_k ein Spline-System nach Satz 7.2. Die Gültigkeit der dualen Minimaleigenschaften folgt schließlich aus

$$U(X_S) = D^{k+1}(\{f \in W_2^{(k+1)}(I) \mid f(a)=0\}) = L^2(I) = H. \diamond$$

Der Projektor DPD^{-1} ist mit der in Satz 7.6 definierten Spline-Interpolationsabbildung identisch. Für jedes $f \in W_2^{(k)}(I)$ und das dazu nach Satz 7.6 bestimmte s besagt Satz 7.7 also insbesondere

$$(M1) \quad \int_I (D^k s(x))^2 dx \leq \int_I (D^k g(x))^2 dx$$

$$\text{für alle } g \in W_2^{(k)}(I) \text{ mit } \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f-g)(x) dx = 0, \\ i=0, \dots, n, \text{ und}$$

$$(M2) \quad \int_I (D^k(f-s)(x))^2 dx \leq \int_I (D^k(f-u)(x))^2 dx$$

$$\text{für alle } u \in \Pi_{2k}\{\pi\} \cap C^{2k-1}(I).$$

Mit einem weiteren Beispiel für abgeleitete Spline-Systeme beschließen wir diesen Paragraphen.

Es sei $\pi: 0=x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}=1$, $n \in \mathbb{N}$, eine Partition von $[0,1]$, $k \geq 2$ und P der oben definierte Spline-Projektor vom Grade $2k-1$ bzgl. π . Wir definieren

$X := \{f \in W_2^{(k)}[0,1] \mid f(0)=0\}$. Da X ein Vektorraum und $(W_2^{(k)}[0,1], P, D^k, L^2[0,1])$ ein eindeutiges Spline-System ist,

ist auch $(X, P, D^k, L^2[0,1])$ ein eindeutiges Spline-System.

Für $\alpha > 0$ definieren wir die " α -malige Integration" der Funktion f durch

$$(J^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(t) dt, \quad x \in [0,1],$$

und für $0 < \beta < 1$ die " β -malige Differentiation" von f durch

$$(D^\beta f)(x) := \frac{d}{dx} (J^{1-\beta} f)(x), \quad x \in [0,1]$$

(vgl. WEYL [22]). Für $k \geq 2$ sind alle $f \in W_2^{(k)}[0,1]$ nach WEYL [22] β -mal differenzierbar, $0 < \beta < 1$. Die Operation D^β ist auf Grund ihrer Definition natürlich linear und $D^\beta: X \rightarrow D^\beta(X)$ surjektiv mit dem Vektorraum $D^\beta(X)$. Nach DOETSCH [7, Band III, Kap. 25, §4] gilt in $\{f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\}$ weiterhin $\text{Ker } D^\beta = [(\pi_1)^{\beta-1}]$, sowie $J^{-\beta} = (J^\beta)^{-1} := D^\beta$ und $(D^\beta)^{-1} = J^\beta$ nach WEYL [22]. Damit erhalten wir $\text{Ker } D^\beta \cap X = (0)$, d.h. D^β ist bijektiv. Also gilt $P(X_{D^\beta}) = P(X) \subset X_{D^\beta}$, $0 < \beta < 1$.

Das bedeutet aber nach Satz 7.2:

Korollar 7.8: Für alle $0 < \beta < 1$ und mit $D^{k-\beta} := D^k J^\beta$ ist

$(D^\beta(X), D^\beta P J^\beta, D^{k-\beta}, L^2[0,1])$ ein eindeutiges Spline-System. $\diamond$

Durch den direkten Nachweis der entsprechenden Orthogonalitätsrelation bzgl. des Differentialoperators gebrochener Ordnung $D^{k-\beta}$ hätte obige Aussage wahrscheinlich nicht so leicht gezeigt werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N.: The Approximation of Linear Functionals. SIAM J. Numer. Anal. 3, 173-182 (1966)
- [2] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L.: The Theory of Splines and Their Applications. New York: Academic Press 1967
- [3] Bochner, S.: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl., 403-411 (1930)
- [4] de Boor, C., Lynch, R.E.: On Splines and Their Minimum Properties. J. Math. Mech. 15, 953-969 (1966)
- [5] Butzer, P.L.: Representation and Approximation of Functions by General Singular Integrals. Ia, Ib. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 22, 1-24 (1960)
- [6] Carlson, R.E., Hall, C.A.: Error Bounds for Bicubic Spline Interpolation. J. Approximation Theory 7, 41-47 (1973)
- [7] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I und III. Basel: Birkhäuser 1950, 1956
- [8] Haußmann, W., Münch, H.J.: Topological Spline Systems. In: Böhmer, K., Meinardus, G., Schempp, W.: Spline-Funktionen, Seite 109-127. Mannheim: Bibliographisches Institut 1974
- [9] Hilbert, S.: A Mollifier Useful for Approximations in Sobolev Spaces and Some Applications to Approximation

- mating Solutions of Differential Equations.
Math. Comput. 27, 81-89 (1973)
- [10] Hoff, J.C.: Approximation with Kernels of Finite Oscillations.
I. Convergence. J. Approximation Theory 3, 213-228 (1970)
II. Degree of Approximation. J. Approximation Theory 12, 127-145 (1974)
- [11] Isaacson, E., Keller, H.B.: Analysis of Numerical Methods. New York: J. Wiley & Sons 1966
- [12] Karlin, S., Ziegler, Z.: Chebyshevian Spline Functions. SIAM J. Numer. Anal. 3, 514-543 (1966)
- [13] Kershaw, D.: Inequalities on the Elements of the Inverse of a Certain Tridiagonal Matrix.
Math. Comput. 24, 155-158 (1970)
- [14] Natanson, I.P.: Constructive Function Theory. Volume III. New York: Ungar 1965
- [15] Neri, U.: Singular Integrals. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
- [16] Schoenberg, I.J.: Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. Parts A and B. Quart. Appl. Math. 4, 45-99, 112-141 (1946)
- [17] Schoenberg, I.J.: Cardinal Interpolation and Spline Functions. J. Approximation Theory 2, 167-206 (1969)
- [18] Schultz, M.H., Varga, R.S.: L-Splines. Numer. Math. 10,

- 345-369 (1967)
- [19] Subbotin, Yu.N.: Diameter of Class W^r_L in $L(0, 2\pi)$ and Spline Function Approximation. Math. Notes (Mat. Zametki) 7, 27-32 (1970)
- [20] Swartz, B.K.: $\mathcal{O}(h^{2n+2-1})$ -Bounds on Some Spline Interpolation Errors. Los Alamos Scientific Laboratory Rep. LA-3886 (1968)
- [21] Swartz, B.K., Varga, R.S.: Error Bounds for Spline and L-Spline Interpolation. J. Approximation Theory 6, 6-49 (1972)
- [22] Weyl, H.: Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 62, 296-302 (1917)

L e b e n s l a u f

Am 4. Oktober 1951 wurde ich, Wolfgang Andreas Halang, als Sohn des Bankkaufmanns Edgar Halang und seiner Ehefrau Erika, geb. Kiesendahl, in Essen geboren.

Von 1958 bis 1962 besuchte ich die Christinen-Schule in Essen und anschließend das Helmholtz-Gymnasium in Essen, wo ich im Jahre 1970 die Reifeprüfung ablegte. Im Wintersemester 1970/71 begann ich mit dem Studium der Mathematik und der Theoretischen Physik an der Ruhr-Universität Bochum, das ich im Oktober 1974 mit der Diplom-Prüfung abschloß.

Im Anschluß daran habe ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. W. Haußmann die vorliegende Arbeit "Über interpolierende C^∞ -Spline-Funktionen" geschrieben. Während dieser Zeit erhielt ich ein Promotionsstipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren H. v. Buttlar, G. Ecker, G. Ewald, P. Gänßler, W. Haußmann, W. Kröll, K. Spallek, R. Reißig und D. Wagner.

Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.

86 Bamberg • Hohe-Kreuz-Str. 9b • Tel. 0951/21617[5 4414]

M. SCHADEL